Ce devoir est à rendre pour le mercredi 18 octobre 2017.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Fonctions indicatrices

Dans tout ce devoir, on fixe un ensemble E quelconque. On rappelle que si $A \in \mathcal{P}(E)$, l'indicatrice de A est la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} . \end{aligned}$$

1. On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ des applications de E dans $\{0,1\}$.
   (a) Lister les éléments de $\mathcal{F}$ dans le cas où $E = \{0,1\}$.
   (b) Démontrer que si E contient strictement plus de deux éléments, $\mathcal{F}$ ne contient aucune bijection.
2. (a) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$; démontrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{F}$; montrer qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f = \mathbb{1}_A$.
   (c) En déduire que l'application

   $$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{F} \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

   est une bijection.
3. On admet (pour l'instant !) que tout nombre réel peut s'écrire d'une unique façon sous la forme d'une suite (infinie) de 0 et 1, appelée *écriture binaire* de ce nombre. Démontrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.