Ce devoir est à rendre pour le mercredi 4 octobre 2017.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Une suite récurrente...

On considère la suite définie par récurrence comme suit : on pose $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad D_{n+2} = (n+1)(D_n + D_{n+1}) \ .$$

1. Démontrer que :
$$\forall n \geq 2, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \ .$$
2. Montrer que l'on a la formule suivante :
$$\forall n \geq 0, \quad D_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \ .$$

...et des bijections.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

1. Lister les éléments des ensembles $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3$.
2. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$; la composée $\sigma \circ \tau$ a–t–elle un sens ? Si oui, as–t–on $\sigma \circ \tau \in \mathfrak{S}_n$?
3. Existe–t–il un élément $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$ tel que :
$$\forall \tau \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma_0 \circ \tau = \tau \circ \sigma_0 = \tau \ ?$$
4. Démontrer par récurrence sur n que l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ contient exactement $n!$ éléments.
5. On pose :
$$X_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma(n) = n\} \ .$$
   (a) Décrire l'ensemble X_3.
   (b) Pour $\sigma \in X_n$, on définit une application $\widehat{\sigma}$ comme suit :
$$\begin{aligned} \widehat{\sigma} : [\![1, n-1]\!] &\to [\![1, n-1]\!] \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned} \quad .$$
      i. Justifier que $\widehat{\sigma} \in \mathfrak{S}_{n-1}$.
      ii. Démontrer que l'application suivante est une bijection :
$$\begin{aligned} \iota : X_n &\to \mathfrak{S}_{n-1} \\ \sigma &\mapsto \widehat{\sigma} \end{aligned} \quad .$$