Semaine 9

◇ Groupes, anneaux et corps

✖***Aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur les sujets suivants : groupes et anneaux quotients, anneaux intègres, caractérisation des sous groupes de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ (peut être donnée en exercice), toute technicité relative à $\mathfrak{S}_n$ (signature, groupe alterné, cardinal, décompositions canoniques, ...).***

- lois de composition interne : stabilité, associativité, commutativité, distributivité, élément neutre, inversibles ;
- notions de groupe et groupe commutatif (abélien) ;
- groupes liés aux anneaux et corps du programme, groupe des bijections d'un ensemble dans lui–même, cas particulier de $\mathfrak{S}_n$;
- puissances d'éléments dans un groupes, notation "en multiples" dans le cas "additif", formule $(xy)^n = x^n y^n$ lors que x et y commutent ;
- notion de sous–groupe, caractérisation standard, persistance du neutre et des inverses ;
- sous–groupes classiques de $(\mathbb{C}^*, \times)$: nombres complexes de module 1 (noté $\mathcal{U}$), racines n–ièmes de l'unité (noté $\mathcal{U}_n$), interprétation géométrique (polygones réguliers inscrits dans le cercle unité), somme $\sum_{\omega \in \mathcal{U}_n} \omega$ nulle dés que $n \geq 2$;
- morphismes de groupes, noyau, image ;
- iso/endo/automorphismes, caractérisation de l'injectivité (resp. de la surjectivité) avec le noyau (resp. l'image) ;
- notion d'anneau (unitaire) et de corps (commutatif), sous–anneaux, sous–corps ;
- groupe $Aa^{\times}$ des inversibles d'un anneau $\mathbb{A}$;
- morphismes d'anneaux ;
- identités remarquables $(a+b)^n$ et $b^n - a^n$ lorsque a et b commutent, cas particulier $b = 1$ dans la seconde ("suite géométrique").

◇ Questions de cours (démonstrations)

- tout énoncé ou définition est exigible ;
- le groupe $\mathfrak{S}_n$ est non–abélien pour $n \geq 3$;
- caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupe par le noyau ;
- identités remarquables $(a+b)^n$ et $b^n - a^n$.