Semaine 3

◇ Entiers naturels, récurrence

✖***Aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur les sujets suivants : dénombrement, combinatoire, arithmétique dans $\mathbb{N}$ (autre que la notion de divisibilité).***

— ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, addition, multiplication ;
— ordre naturel sur $\mathbb{N}$, entier $b - a$ lorsque $a \leq b$;
— divisibilité, quotient ;
— notation $[\![1, n]\!]$ pour l'ensemble des entiers compris entre 1 et n ;
— toute partie non vide (resp. non vide et majorée) de $\mathbb{N}$ admet un plus petit (resp. plus grand) élément ;
— principe de récurrence : si $\mathcal{P}(n)$ est un prédicat de la variable n tel que $\mathcal{P}(n_0)$ soit vérifié et que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$;
— notations $\sum$ et $\prod$, changements d'indices, manipulation élémentaires (extraction de termes, regroupement) ;
— exemples classiques de démonstration par récurrence : somme des entiers de 1 à n, de leurs carrés, des termes d'une suite géométrique ;
— identité remarquable $a^{n+1} - b^{n+1}$;
— factorielle, coefficients du binôme : notations $n!$ et $\binom{n}{k}$, triangle de Pascal ;
— formule du binôme de Newton ;
— récurrence forte, récurrence à deux rangs.

◇ Questions de cours (démonstrations)

— tout énoncé ou définition est exigible ;
— somme des entiers de 1 à n ;
— somme des termes d'une suite géométrique ;
— formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} .$$