Fractions rationnelles

– I –

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :
   (a) $F = \frac{X^3}{X(X+1)}$;
   (b) $G = \frac{X^2+1}{X^2+X+1}$;
   (c) $H = \frac{1}{X^2-X-1}$;
   (d) $I = \frac{1}{(X-1)^2(X+2)}$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, pour $n \geq 1$:
$$F_n = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(X-i)} = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} .$$

– II –

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et de racines (comptées avec multiplicité) $x_1, \dots, x_n$ et soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-x_i}$;
   (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a-x_i}$;
   (c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2}$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1 < \dots < x_n$ et soit $a \in \mathbb{R}_-^*$.
   (a) Démontrer que la fonction rationnelle f associée à $\frac{P'}{P}$ vérifie les propriétés suivantes :
   — $\exists! y_0 \in]-\infty, x_1[,\ f(y_0) = a$;
   — $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \exists! y_k \in]x_k, x_{k+1}[,\ f(y_k) = a$.
   (b) En déduire que le polynôme $P' - aP$ est scindé à racines simples.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \dots, x_n$.
   (a) Justifier que si on pose $a_i = \frac{1}{P'(x_i)}$ on a
$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - x_i} .$$
   (b) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors on a :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)} .$$
   (c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-2$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$ lorsque $P(0) \neq 0$.