Polynômes

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

– I –

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Démontrer que $P - X$ divise $P^k - X^k$ pour tout $k \geq 1$.
   (b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
   (c) Conclure en démontrant que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$.

– II –

1. Déterminer le pgcd des polynômes $X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $2X^3 + 1$.
2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$ et soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
   (b) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\varphi + X \sin\varphi)^n$ par $X^2 + 1$.
3. On dit qu'un sous–groupe de $\mathbb{K}[X]$ en est un *idéal* si $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in I$, $PQ \in I$.
   (a) Démontrer que pour tout $A \in K[X]$, $A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
   (b) On fixe dans cette question un idéal I de $\mathbb{K}[X]$ différent de $\{0\}$.
      i. Justifier l'existence de $r = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$.
      ii. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $U \in I$ de degré r.
      iii. Démontrer que $I = U\mathbb{K}[X]$.

– III –

1. Soit $n \geq 2$ et soient $a, b \in \mathbb{C}$; on pose, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Déterminer le produit
$$\prod_{k=0}^{n-1} (a + b\omega_k) .$$
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point et f, g deux fonctions polynomiales telles que $\forall x \in I$, $f(x)g(x) = 0$. Démontrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Ce résultat s'applique–t–il aux fonctions non polynomiales ?
3. Déterminer les solutions du système
$$\begin{cases} x + y & = 3 \\ x^2 + y^2 & = 5 \end{cases} .$$
4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P^2 + 1$.
   (a) On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.
   (b) Que peut–on en déduire sur le polynôme P ?

– IV –

1. Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(3X) = P' + 5P''$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 3$ et $P^{(n)}(1) = 0$ pour $n \geq 3$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^3$ divise le polynôme
$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n .$$

– V –

1. Démontrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Quelle est la décomposition en produit d'irréductibles de $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$?