Équations différentielles linéaires

– I –

1. Résoudre les équations homogènes suivantes :
   (a) $y' + 3xy = 0$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $y' + \dfrac{1}{x\ln x}y = 0$ sur $]1, \infty[$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   Indication : pour les questions (a) à (c) on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.
   (a) $y' + 2y = t^2 + t + 1$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $y' + 3y = (x^2+1)\,e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $y' + 2y = (x+1)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
   (e) $y' + \dfrac{1}{1+x}y = \dfrac{1}{(1+x)^3}$ sur $]-1, \infty[$.
3. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $x\ln(x)y' - y = 4$ sur $]1, \infty[$ avec $y(e) = 1$;
   (b) $y' + xy = 2x$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'\mathrm{sh}(x) - \dfrac{y}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$.

– II –

1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
   (a) $y'' + y' = 3 + 2x$;
   (b) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$;
   (c) $y'' + y = \mathrm{sh}(x)$.
2. Déterminer la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

– III –

1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 2f(x) = 3x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)\,.$$

3. (a) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   (b) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x$.