

DÉRIVATION

– I –

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$.
- (a) Étudier la dérivabilité de la fonction f . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur son ensemble de dérivabilité ?
- (b) Donner une expression alternative de la fonction f .
2. On considère la fonction suivante, définie sur \mathbb{R} :

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* .
- (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

- (c) En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0 et calculer $f^{(n)}(0)$.
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en une fonction dérivable sur \mathbb{R} sans y être de classe \mathcal{C}^1 .
4. Démontrer que la fonction tangente hyperbolique admet une réciproque définie sur un ensemble à déterminer et calculer sa dérivée.

– II –

1. Soit P une fonction polynomiale; démontrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.
2. On considère la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ ainsi que la suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.
- (a) Démontrer que f admet un point fixe, que nous noterons α .
- (b) Justifier que $\forall n \geq 0, u_n \in \mathbb{R}_+$.
- (c) Montrer que $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge (vers quelle limite ?).
3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

– III –

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ une fonction convexe. Démontrer que :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

2. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$; démontrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

3. *Inégalités de Young et Hölder*. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- (a) Démontrer que pour tous $x, y > 0$, on a $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
- (b) En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$