Limites, continuité

– I –

Pour chacune des affirmations suivantes, dire (en justifiant par une preuve ou un contre–exemple) si elle est vraie ou fausse.

1. Toute fonction continue est bornée.
2. Toute fonction bornée est continue.
3. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
4. Le quotient de deux fonctions continues est continu.
5. La fonction valeur absolue est continue en 0.
6. Soit f une fonction continue. Alors $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 3\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 3\right)$.
7. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $g : x \mapsto f(\pi x + \sqrt{17})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

– II –

1. Étudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
2. Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Soit f une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.
4. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$; démontrer que f est bornée.
5. On se donne une fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos(x)\,.$$
   (a) Exprimer, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
   (b) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\,.$$
   (c) En déduire l'expression générale de f pour $x \neq 0$. Conclure.

– III –

1. Soit S un segment non vide et soit $f \in \mathscr{C}^0(S, S)$. Démontrer que f admet un point fixe. Ce résultat reste–t–il vrai sur un intervalle quelconque ?
2. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et soient $f, g \in \mathscr{C}^0(I)$ ne s'annulant pas et telles que $|f| = |g|$.
   (a) Démontrer que $f = \pm g$.
   (b) Ce résultat reste–t–il valable si on supprime l'hypothèse de continuité ?
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}^0(]a, b[)$ telle que f admette une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a et b. Démontrer que f n'est pas injective.
4. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction croissante. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) + x$, démontrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -x$.
5. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < 0$ et $b > 0$. Démontrer que toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tendant vers a en $-\infty$ et b en $+\infty$ s'annule.