

GROUPES, ANNEAUX ET CORPS

– I –

1. (a) Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.
 (b) Que dire du cas où $\forall g \in G, g^2 = g$?
2. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe G . Les ensembles $H_1 \cap H_2$ et $H_1 \cup H_2$ sont-ils des sous-groupes de G ?
3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même.
4. Démontrer que les groupes \mathbb{R}^* et $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ sont isomorphes.
5. On pose $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Démontrer que (Γ, \circ) est un groupe. Est-il abélien?
6. Soit $(G, +)$ un groupe abélien et soient H, K deux sous-groupes de G .
 (a) Démontrer que $H + K = \{h + k \mid (h, k) \in H \times K\}$ est un sous-groupe de G .
 (b) Démontrer que si $H \cap K$ est trivial, alors $H + K$ est isomorphe au groupe produit $H \times K$.
7. Soit $n \geq 1$; on pose

$$H_n = \{\sigma \in \mathfrak{S} \mid \sigma(n) = n\}.$$

Démontrer que H_n est un sous-groupe de (\mathfrak{S}_n, \circ) .

– II –

1. On appelle *anneau de Boole* tout anneau \mathbb{A} tel que $\forall a \in \mathbb{A}, a^2 = a$.
 (a) Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.
 (b) Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau de Boole. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A}, a + a = 0$.
2. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments *nilpotents* de \mathbb{A} de la façon suivante :

$$\text{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}.$$

- (a) Démontrer que $\text{Nil}(\mathbb{A})$ est stable par produit et somme.
- (b) $\text{Nil}(\mathbb{A})$ est-il un sous-anneau de \mathbb{A} ?
3. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle *idéal* de \mathbb{A} tout sous-groupe $(I, +)$ de $(\mathbb{A}, +)$ tel que

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall x \in I, ax \in I.$$

- (a) Démontrer que si I est un idéal contenant 1 alors $I = \mathbb{A}$. Quels sont les idéaux d'un corps?
- (b) Démontrer que si I et J sont deux idéaux de \mathbb{A} alors $I \cap J$ et $I + J$ le sont également.
4. Soit \mathbb{A} un anneau tel que l'application $f : x \mapsto x^2$ soit un endomorphisme surjectif de \mathbb{A} . Démontrer que \mathbb{A} est commutatif.
5. L'anneau \mathbb{R}^2 (muni des opérations terme à terme) est-il intègre?
6. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.
7. Soit \mathbb{K} un corps.
 (a) Justifier que pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ on a $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.
 (b) Démontrer que tout endomorphisme de \mathbb{K} est injectif.