

SUITES NUMÉRIQUES

– I –

- Démontrer que la suite de terme général $u_n = 2 + (-1)^n$ est divergente.
- Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
 - $u_n = (-1)^n e^{-n}$
 - $v_n = \frac{n^2 + 7}{n^3 + n^4}$
 - $w_n = \lfloor e^n \rfloor$
 - $x_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 1.
- Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?
- Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2}$.

– II –

- Déterminer la borne supérieure de l'ensemble $\left\{1 - \frac{1}{x} \mid x > 0\right\}$.
- Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $+\infty$ et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.
- Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I \setminus \{a\}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ (on dit que a est *adhérent* à $I \setminus \{a\}$).

– III –

- Étudier la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{i}{4}u_n$.
- Moyenne de Césaro*. Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

- Moyenne arithmético-géométrique*. Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Démontrer que u et v sont adjacentes.

- Déterminer le terme général des suites récurrentes suivantes et calculer leur limite éventuelle.
 - $u_0 = 3$, $u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$;
 - $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
- On considère la suite positive $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n$ et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$.
 - Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 - Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en déduire celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.