

## NOMBRES RÉELS

– I –

1. Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .
2. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ; démontrer que  $\sqrt{|x-y|} \geq |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$ .
3. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

– II –

1. Déterminer la borne supérieure, si elle existe, de l'ensemble

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} \mid x \in [1, \infty[ \right\}.$$

2. Soient  $A, B$  deux parties non vides de  $\overline{\mathbb{R}}$  telles que  $B \subset A$ . Montrer, en justifiant l'existence des quantités concernées, que :

$$\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A).$$

3. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad x < y.$$

Que dire des quantités  $\inf(B)$  et  $\sup(A)$  ?

4. Soient  $A, B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

Démontrer que  $A + B$  admet une borne supérieure vérifiant  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

5. Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $a < b$ ; étudier les éventuelles bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in [a, b] \right\}.$$

6. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante. On pose

$$A = \{x \in [0, 1] \mid x \leq f(x)\}.$$

- (a) Démontrer que pour tout  $x \in A$  on a également  $f(x) \in A$ .
  - (b) Montrer que  $A$  admet une borne supérieure  $a$  et que  $f(a) \geq a$ .
  - (c) En déduire que  $f(a) = a$ .
7. Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$B = \{|x - y| \mid x, y \in A\}.$$

- (a) Démontrer que  $B$  est non vide et bornée.
- (b) Montrer que  $B$  admet un plus petit élément, dont on donnera la valeur.
- (c) Démontrer que  $B$  admet une borne supérieure vérifiant  $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$ .

– III –

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ; étudier la quantité  $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ .
2. On considère la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x - \lfloor x \rfloor|.$$

- (a) Tracer l'allure du graphe de  $f$  sur  $[-3, 3]$ .
  - (b) Déterminer  $f^{-1}(\{0\})$ .
  - (c) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ .
  - (d) Démontrer que  $\sup(f(\mathbb{R})) = 1$ .
3. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ; démontrer que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$ .