Rappels et compléments d'analyse

– I –

1. Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), lister les éventuels extrema (locaux et/ou globaux), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, périodicité, ...) et tracer l'allure de la courbe.

   (a) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$; (c) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\ln(x)$; (e) $j : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

   (b) $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$; (d) $i : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)$; (f) $k : x \mapsto \exp(\sin(3x)^2)$.

2. Étudier le sens de variation des deux fonctions suivantes :

   (a) pour $a > 0$, $x \mapsto x^a$; (b) pour $x \in]0,1[$, $a \mapsto x^a$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

4. (a) Montrer que, pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} .$$

5. Montrer que pour tous $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln\frac{a+b}{2} .$$

– II –

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}$; démontrer que :

   (a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$; (c) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;

   (b) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$; (d) $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer que $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

– III –

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; démontrer que :

   (a) $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$;

   (b) $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; montrer que :

$$\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)+1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{2}} .$$

3. Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; on pose $t = \tan(\theta/2)$ et $x = \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   (a) Démontrer que $x = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.

   (b) En déduire une expression de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.

   (c) Exprimer θ en fonction de x.

4. (a) Dériver, lorsque cela est possible, la fonction $x \mapsto \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \arctan(e^x)$.

   (b) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arctan(e^x) + c .$$

   Déterminer la valeur de c.