Ensembles

1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble à quatre éléments. Compléter chacune des assertions suivantes avec le symbole "$\in$" ou "$\subset$" de façon à ce qu'elles soient vraies.

   (a) $d \ldots E$; (c) $E \ldots E$; (e) $E \ldots \mathscr{P}(E)$; (g) $\{a, d\} \ldots E$;
   (b) $\{c\} \ldots E$; (d) $\emptyset \ldots E$; (f) $\emptyset \ldots \mathscr{P}(E)$; (h) $\{a, d\} \ldots \mathscr{P}(E)$.

2. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :
$$A \cap B = A \cap C \quad \Leftrightarrow \quad A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} .$$

3. Déterminer
$$\bigcap_{n \geq 1} \left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{7}{n}\right] .$$

4. Soit $P(n)$ la propriété "l'entier $8^n + 1$ est divisible par 7". Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 0$. Que peut–on en déduire ?

5. On considère la suite définie par récurrence comme suit :
$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_1 & = 1 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} & = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} .$$

   (a) Déterminer les racines ψ et $\overline{\psi}$ du polynôme $X^2 - X - 3$.

   (b) Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\psi^n - \overline{\psi}^n}{\psi - \overline{\psi}} .$$

Techniques de calcul algébrique

1. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} .$$

2. Calculer le produit suivant, pour $n \geq 2$:
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) .$$

3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

4. Soit $n \geq 1$; en faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} , \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} .$$

5. En faisant un usage pertinent de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} .$$

6. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$; calculer
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} .$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Déterminer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + j$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

8. Résoudre les systèmes linéaires suivants (pour $m \in \mathbb{R}$) :
$$\begin{cases} x - y + 2z & = 1 \\ x + 3z & = 0 \\ x + y + z + t & = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y & = 0 \\ x - 3y & = 1 \\ 2x + 2y & = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z & = m+1 \\ mx + y + (m-1)z & = m \\ x + my + z & = 1 \end{cases} .$$