Logique

– I –

1. Soient A, B et C trois points du plan.
   (a) Écrire une assertion caractérisant le fait que le triangle ABC soit équilatéral.
   (b) En déduire une assertion caractérisant le fait que ce triangle ne soit **pas** équilatéral.
   (c) Même exercice en remplaçant "équilatéral" par "isocèle".
2. Étant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité, que
$$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \ .$$
3. Soient A, B et C trois assertions. L'assertion suivante est-elle vraie ?
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C) \ .$$

– II –

1. Quelle est la différence entre les deux phrases quantifiées suivantes ?
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^3 = x \quad \text{et} \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^3 = x \ .$$
2. Soient P et Q deux assertions dépendant d'une variable x. Les propositions suivantes sont–elles équivalentes ? Dans le cas contraire, l'une implique–t–elle l'autre ?
   (a) $\forall x,\ P(x) \vee Q(x)$ et $(\forall x,\ P(x)) \vee (\forall x,\ Q(x))$;
   (b) $\exists x,\ P(x) \vee Q(x)$ et $(\exists x,\ P(x)) \vee (\exists x,\ Q(x))$;
   (c) $\forall x,\ P(x) \wedge Q(x)$ et $(\forall x,\ P(x)) \wedge (\forall x,\ Q(x))$;
   (d) $\exists x,\ P(x) \wedge Q(x)$ et $(\exists x,\ P(x)) \wedge (\exists x,\ Q(x))$.
3. Nier la phrase quantifiée suivante :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (|x| \leq \delta) \Rightarrow (|x^2| \leq \varepsilon) \ .$$
4. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Expliquer la signification et nier les phrases quantifiées suivantes :
   (a) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M$;
   (b) $\forall x \in A,\ \exists M \in \mathbb{R},\ x \leq M$;
   (c) $\exists x \in A,\ \forall M \in \mathbb{R},\ x \leq M$;
   (d) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x \leq M$.
5. Exprimer par une phrase quantifiée l'assertion "le cube de tout nombre réel positif supérieur ou égal à 3 est supérieur ou égal à 27". Donner sa négation.

– III –

1. Démontrer que l'assertion "tout entier divisible par 2 et 4 est divisible par 8" est fausse.
2. Démontrer par l'absurde que si $0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = 1$ sont des éléments de $[0,1]$ alors il existe i compris entre 0 et $n-1$ tel que $x_{i+1} - x_i \geq \dfrac{1}{n}$.