Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 3 pages.**

⧫ Exercice 1 : Apéritif

Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cet exercice sera noté sur 0 point(s) pour les étudiants suivants : Zhou, Dubruille, Bottone, Perusek, Dutailly.

⧫ Exercice 2 : extrait Mines–Sup 2006

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs du couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles $M(x,y)$ est inversible. Dans ce cas, donner une expression de $M(x,y)^{-1}$.
2. On pose $\Sigma = \{M(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
   (a) $(\Sigma, +)$ est–il un groupe ?
   (b) Même question pour $(\Sigma \cap GL_2(\mathbb{R}), \times)$.
3. On pose $\Lambda = \{A + M(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $(\Lambda, +, \times)$ est un sous–anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que si $B \in \Lambda$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda B \in \Lambda$.
4. Démontrer que l'application suivante est un morphisme de groupes bijectif :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +) &\to (\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +) \\ B &\mapsto M(2,1) \times B. \end{aligned}$$

♦ Problème : équation de Bessel

On étudiera à plusieurs reprises dans ce problème des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients **non constants**, qui ne rentrent donc pas dans le cadre du cours ; attention donc à lire **attentivement** l'énoncé des questions. On cherchera toujours les solutions à valeurs réelles des équations proposées. **La partie I est indépendante des parties II et III.**

– I –

On s'intéresse ici aux équations suivantes, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin I$.

$$\mathrm{sh}(x)y'' + 2\mathrm{ch}(x)y' + \mathrm{sh}(x)y = 0 \qquad (\mathbf{E}1)$$

$$\mathrm{sh}(x)y' + \mathrm{ch}(x)y = 0 \qquad (\mathbf{E}2)$$

1. Justifier **proprement** que $I \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_-^*$.

Dans toute la suite on considérera, pour simplifier, que $I = \mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre l'équation ($\mathbf{E}2$).
3. (a) Soit $f \in \mathscr{C}^2(I)$. Démontrer que f est solution de l'équation ($\mathbf{E}1$) si et seulement si $g : x \mapsto f'(x) + \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)} f(x)$ est solution de ($\mathbf{E}2$).

   (b) En déduire les solutions de l'équation ($\mathbf{E}1$).

– II –

On fixe dans cette partie un intervalle I de $\mathbb{R}$ et deux fonctions $p, q \in \mathscr{C}^0(I)$. On supposes trouvées $f, g \in \mathscr{C}^2(I)$ telles que :

$$f'' + p(x)f = 0 \qquad (\mathbf{E}3)$$

et

$$g'' + q(x)g = 0\,. \qquad (\mathbf{E}4)$$

1. On pose, pour $x \in I$, la matrice suivante :

$$A(x) = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,.$$

   (a) On pose, pour $x \in I$, $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$. À quelle condition sur $W(x)$ a–t–on $A(x) \in GL_2(\mathbb{R})$?

   (b) Justifier que $W \in \mathscr{C}^1(I)$ et démontrer que

$$\forall x \in I, \quad W'(x) = (p(x) - q(x))f(x)g(x)\,.$$

2. On suppose dans cette question que $p \leq q$ sur l'intervalle I et qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f(]a,b[) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Énoncer le théorème de Cauchy associé aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

   (b) En admettant que le théorème énoncé ci–avant s'applique à l'équation ($\mathbf{E}3$), démontrer que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont non nuls.

   (c) Montrer, à l'aide d'un taux d'accroissement, que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

   (d) Démontrer par l'absurde à l'aide du résultat de la question 1. qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

3. (a) Démontrer que si $q \geq 1$ sur I alors g s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π. ***Indication : on pourra utiliser le résultat de la question** 2. **en fixant** $p = 1$ **et en résolvant (E3) dans ce cas.***

   (b) Montrer par l'absurde que si $q \leq 1$ sur I et que si g n'est pas nulle alors g s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π.

– III –

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère l'**équation de Bessel**, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0\,. \tag{$\mathbf{E}5$}$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$; démontrer que f est solution de ($\mathbf{E}5$) si et seulement si $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ est solution de l'équation suivante :

$$y'' + \left(1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2}\right) y = 0\,. \tag{$\mathbf{E}6$}$$

2. (a) Vérifier que si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ est solution de ($\mathbf{E}5$) et que $g : x \mapsto f(x)\sqrt{x}$ alors

$$f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})\,.$$

   (b) On suppose que f est une solution non nulle de ($\mathbf{E}5$). Démontrer que :
      i. si $\lambda \geq \frac{1}{2}$ alors f s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur strictement inférieure à π ;
      ii. si $\lambda \leq \frac{1}{2}$ alors f s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur π.