Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

Commençons ce problème par une paire de définitions...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **nombre de Mersenne** d'indice n l'entier

$$M_n = 2^n - 1 .$$

- Un entier $n \in \mathbb{N}$ est appelé **nombre parfait** si il est la somme de ses diviseurs positifs **stricts** (*i.e* différents de lui–même). Ainsi, n est parfait si

$$n = \sum_{d \in \mathscr{D}^*(n)} d, \qquad \text{où } \mathscr{D}^*(n) = \{d \in [\![1, n-1]\!] \mid d \text{ divise } n\} .$$

  Par exemple, les diviseurs positifs stricts de 6 sont 1,2 et 3 : de fait, 6 est un nombre parfait car $6 = 1 + 2 + 3$. À l'inverse, 4 n'est pas un nombre parfait car $4 \neq 1 + 2$.

– I –

1. Soit p un nombre premier ; démontrer que p ne peut être un nombre parfait.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs. Justifier que n est un nombre parfait si et seulement si $2n = S(n)$.
3. On souhaite dans cette question démontrer par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(r)$ suivante : *pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admettant r diviseurs premiers distincts, on a :*

$$S(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

   où

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} .$$

   est la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

   (a) Démontrer que $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.

   (b) Supposons la propriété vérifiée à un certain rang $r \geq 1$ et fixons un entier n de décomposition en produit de facteurs premiers

$$n = \prod_{i=1}^{r+1} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} .$$

   i. Notons $d_1, \dots, d_N$ les diviseurs de $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Démontrer que

$$S(n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} d_i p_{r+1}^j .$$

   ii. En déduire que

$$S(n) = S(m) \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^j .$$

   iii. Conclure.

4. En utilisant le résultat obtenu à la question précédente, démontrer que si n et m sont deux entiers premiers entre eux, alors $S(nm) = S(n)S(m)$.

– II –

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: démontrer que si le nombre de Mersenne M_n est premier, n l'est également.
2. Soit p un nombre premier tel que M_p soit également premier. Démontrer que $2^{p-1}M_p$ est un nombre parfait.
3. Fixons dans cette question un nombre parfait **pair** n.
   (a) On pose $a = v_2(n)$ la valuation 2–adique de l'entier n. Rappeler la définition de cette dernière et justifier qu'il existe un nombre impair b tel que $n = 2^a b$.
   (b) Montrer que $S(n) = (2^{a+1} - 1)S(b)$ et en déduire que $2^{a+1}b = (2^{a+1} - 1)S(b)$.
   (c) Démontrer que $(2^{a+1} - 1)$ divise b et que les seuls diviseurs positifs de b sont b et $\frac{b}{2^{a+1}-1}$.
   (d) Conclure que b est égal à $2^{a+1} - 1$. Est–il premier ?
   (e) Faire le bilan des questions précédentes en démontrant que tout nombre parfait pair est de la forme $2^{p-1}M_p$, avec p et M_p tous deux premiers.