Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

On considère la suite récurrente $(z_n)_n$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & 0 \\ \forall n \geq 0,\ z_{n+1} & = & z_n^2 + c \end{array}\right. ,\ \text{avec } c \in \mathbb{C}.$$

Le but de ce problème est d'étudier l'influence du paramètre c sur la nature de celle–ci.

0. Justifier que, pour tout $n \geq 0$ on a l'inégalité :

$$|z_{n+1}| \geq \left||z_n|^2 - |c|\right| .$$

– I –

On s'intéresse dans cette question au cas où c est un nombre réel.

1. Justifier que dans ce cas la suite $(z_n)_n$ est à valeurs réelles.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que
$$z_{n+1} - z_n \geq c - \frac{1}{4} .$$
   (b) Minorer, pour $n \geq 0$ la somme $\sum_{k=0}^{n} z_{k+1} - z_k$ en fonction de n et c.
   (c) En déduire que si $c > \frac{1}{4}$ alors la suite $(z_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
3. Démontrer que si $c = -1$, alors
$$\forall n \geq 0, \quad z_n = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ sinon} \end{array}\right. .$$
4. Démontrer par récurrence que si $c \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, alors
$$\forall n \geq 0, \quad |z_n| \leq \frac{1}{2} .$$
5. Dans cette question, on suppose que $c \in [-2, 0]$.
   (a) Justifier que $c^2 + c \leq -c$.
   (b) Démontrer par récurrence que
$$\forall n \geq 0, \quad c \leq z_n \leq -c .$$

– II –

On fixe dans cette partie $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$.

1. Démontrer que l'équation $X^2 = X + |c|$ admet une unique solution α dans $]2, +\infty[$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| - \alpha$.
   (a) Démontrer que $\forall n \geq 0,\ \alpha + u_{n+1} \geq (\alpha + u_n)^2 - |c|$.
   (b) En déduire que $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq 2\alpha u_n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.
3. Que peut–on en déduire quant à la nature de la suite $(z_n)_n$?

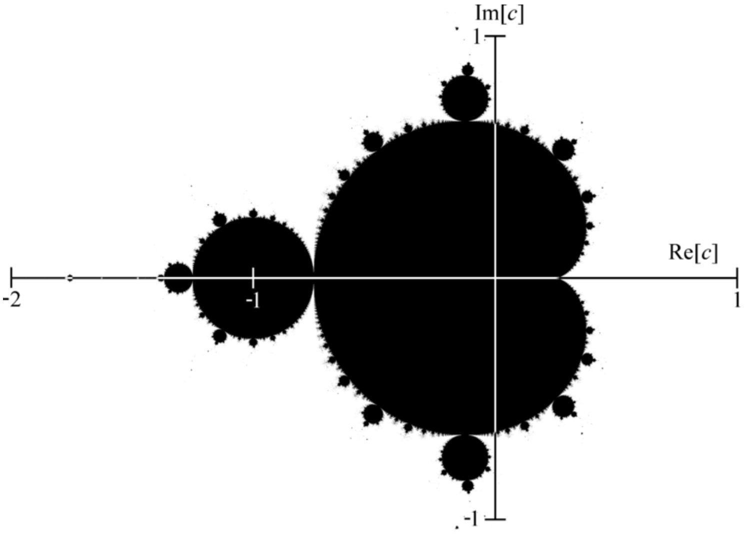

Figure 1 – Ensemble de Mandelbrot

– III –

On appelle **ensemble de Mandelbrot** la partie suivante de $\mathbb{C}$:

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} \,|\, (z_n)_n \text{ est bornée.}\}$$

1. Parmi les deux phrases quantifiées suivantes, sélectionner celle qui exprime le fait que la suite $(z_n)_n$ soit bornée. Justifier brièvement.
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}_+, \ |z_n| \leq M$;
   (b) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \ |z_n| \leq M$.
2. (a) Justifier que $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\subset \mathbb{C} \setminus \mathscr{M}$.
   (b) A–t–on $-1 \in \mathscr{M}$?
3. Démontrer que $\mathscr{M} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}$.
4. Montrer, en justifiant soigneusement, que
$$\mathscr{M} \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right] .$$
5. On suppose dans cette question que $c \in \mathscr{M}$. On pose $\zeta_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_{n+1} = \zeta_n^2 + \overline{c}$.
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geq 0, \ \overline{\zeta_n} = z_n$.
   (b) En déduire que $\overline{c} \in \mathscr{M}$.
   (c) En reformulant le résultat du (b), énoncer une propriété géométrique de l'ensemble de Mandelbrot.