Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

♦ Exercice : un peu de trigonométrie, pour changer

On fixe dans cet exercice $x \in]0,4[$ et on pose :

$$\omega = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}\,.$$

1. Justifier que ω est bien défini.
2. Démontrer que :
$$\cos(\omega) = 1 - \frac{x}{2}\,.$$
3. (a) Montrer que $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ sont positifs.
   (b) Démontrer que :
$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{4-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2}\,.$$
4. Déduire de ce qui précède que :
$$\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}\right)\,.$$

♦ Problème : sous–groupes de $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{Z},+)$

Dans toute la suite, la notation $\mathbb{A}$ désignera un ensemble égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. On dira qu'un ensemble G est un **sous–groupe** de $\mathbb{A}$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(SG1) $G \subset \mathbb{A}$;

(SG2) $0 \in G$;

(SG3) $\forall x, y \in G,\ x - y \in G$;

On dira également qu'un sous groupe G de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, $G \cap]x, y[\neq \emptyset$.

– I –

1. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}$.
2. Pour chacun des ensembles suivants, justifier s'ils sont ou non des sous–groupes de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$, $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.
3. Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Démontrer que dans ce cas $G_1 \cap G_2$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
4. (a) Soit $a \in \mathbb{A}$. Démontrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous–groupe de $\mathbb{A}$.
   (b) Soient G_1 et G_2 deux sous–groupes de $\mathbb{A}$. Que dire de $G_1 \cup G_2$?
5. Soit G un sous–groupe de $\mathbb{A}$ et soit $g \in G$. Démontrer qu'alors $g\mathbb{Z} \subset G$.

– II –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{Z}$ différent de $\{0\}$.

1. Démontrer que l'ensemble $G \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, que l'on noteras n_0.
2. (a) Soit $n \in G$; justifier qu'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = qn_0 + r$ et $0 \leq r < n_0$.
   (b) En déduire que $G \subset n_0\mathbb{Z}$.
3. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

   Proposition 1.
   Soit G un sous–groupe de $\mathbb{Z}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G = n_0\mathbb{Z}$.

– III –

On fixe dans toute cette partie un sous–groupe G de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   (a) Commençons par supposer que $a \notin G$.
      i. Démontrer qu'il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b < 2a$.
      ii. En déduire qu'il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < b - c < a$.
      iii. Conclure en utilisant la question précédente que $a \in G$ et que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   (b) On se fixe dans cette question un élément $g \in G$ et on pose $n = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
      i. Démontrer que $0 \leq g - na < a$.
      ii. En déduire que $g = na$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $(a > 0) \Rightarrow (G = a\mathbb{Z})$.
3. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   (a) Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
      i. Démontrer qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < g < y - x$.
      ii. Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in]x, y[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $(a = 0) \Rightarrow (G$ est dense dans $\mathbb{R})$.
4. Faire la synthèse de cette partie en démontrant le résultat suivant.

   Proposition 2.
   Soit G un sous–groupe de $\mathbb{R}$. Alors :
   - *soit il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $G = a\mathbb{Z}$;*
   - *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*