Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 3 pages.**

♦ Problème 1 : autour des fonctions (im)paires

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions paires et impaires. **Une fois de plus, le plus grand soin est attendu dans la rédaction des réponses.**

– I –

Définition 1.

> *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit* ***symétrique*** *si il vérifie la propriété suivante :*
>
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in I) \Rightarrow (-x \in I)\ .$$

On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont **convexes**, *i.e* si I est un intervalle, alors pour tout $x, y \in I$, $[x, y] \subset I$.

1. Donner la négation de la phrase quantifiée suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in I) \Rightarrow (-x \in I)\ .$$
2. Les intervalles suivants sont–ils symétriques (justifier) : $[-2, 2]$, $]-2, 2]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$?
3. Démontrer que si I est un intervalle symétrique non vide, alors $0 \in I$.
4. (a) Démontrer que si I, J sont deux intervalles symétriques de $\mathbb{R}$, alors $I \cup J$ est symétrique.
   (b) Même question avec $I \cap J$.

– II –

On fixe dans cette question un intervalle I symétrique et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et paire.

1. On pose :
$$\begin{aligned} \eta : I &\to I \\ x &\mapsto -x\ . \end{aligned}$$
   (a) Justifier que $f \circ \eta = f$.
   (b) Calculer la dérivée de $f \circ \eta$.
   (c) En déduire que f' est une fonction impaire.
2. Énoncer et démontrer un résultat analogue dans le cas où f est supposée impaire.

– III –

1. On fixe dans cette question un intervalle I symétrique et une fonction impaire $f : I \to \mathbb{R}$. On pose :
$$J = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in I,\ y = f(x)\}\ .$$
   (a) Expliquer en français à quoi correspond l'ensemble J.
   (b) Soit $y \in J$. Démontrer que $-y \in J$. Qu'en déduire ?

2. Soient I, J deux intervalles symétriques et soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
   (a) Justifier que la composée $g \circ f$ est bien définie.
   (b) On suppose f impaire et g paire. Démontrer que $g \circ f$ est paire.
   (c) De même, étudier l'éventuelle (im)parité de la fonction $g \circ f$ en fonction de celles de f et g.

– IV –

On fixe dans cette partie un intervalle I symétrique et une fonction f paire et croissante sur I. On fixe également deux points $x, y \in I$ tels que $x \leq y$.

1. On suppose que $-y \leq x \leq y$. Démontrer que $f(x) = f(y)$.
2. On suppose dans cette question que $x \leq -y \leq y$.
   (a) Justifier que $-x \geq y$.
   (b) En déduire que $f(x) = f(y)$.
3. En s'inspirant des questions précédentes, démontrer que si $x \leq y \leq -y$ alors $f(x) = f(y)$.
4. Que peut–on conclure quant à la fonction f ?

⧫ Problème 2 : fonctions dérivables sur un segment

Dans tout ce problème, on pose :

$$\mathscr{D} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est dérivable sur } [0,1]\}$$

Une fonction f appartiendra donc à l'ensemble $\mathscr{D}$ si et seulement si elle est dérivable sur le segment $[0,1]$.

– I –

1. Soient $f, g \in \mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; dire (en justifiant) si les fonctions suivantes appartiennent à D : $f + \lambda g,\ f \times g,\ \dfrac{f}{g}$.
2. (a) Existe–t–il dans $\mathscr{D}$ une fonction f_0 telle que
   $$\forall f \in \mathscr{D},\ f + f_0 = f \ ?$$
   (b) Existe–t–il dans $\mathscr{D}$ une fonction f_1 telle que
   $$\forall f \in \mathscr{D},\ f \times f_1 = f \ ?$$
3. Soit $f \in \mathscr{D}$ une fonction strictement croissante.
   (a) Justifier que f admet un maximum et un minimum, que l'on notera respectivement M et m.
   (b) Soit $x \in [m, M]$. En faisant usage d'un résultat vu en terminale et s'abrégeant en trois lettres, démontrer que :
   $$\exists y \in [0,1],\ f(y) = x\ .$$

– II –

1. On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(2+x)$ et $g : x \mapsto x+1$, définies sur $[0,1]$.
   (a) Justifier que $f, g \in \mathscr{D}$.
   (b) Montrer que $f \leq g$.
   (c) Démontrer que $(fg)' \leq 2g$.
2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(2+x^4) \end{aligned}$$

   (a) Démontrer que $h \in \mathscr{D}$.
   (b) Dresser son tableau de variations.
   (c) La fonction h admet–elle des extrema ? Lesquels ?
3. Mêmes questions pour la fonction

$$\begin{aligned} \ell : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

♦ Digestif trigonométrique

Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.