Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

♦ Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de calculer l'entier

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{999} k(k+1)(k+2) \\ &= (1\times 2\times 3) + (2\times 3\times 4) + (3\times 4\times 5) + \ldots + (999\times 1000\times 1001) \end{aligned}$$

de deux façons différentes. ***On ne demande pas ici une valeur approchée, mais une expression "simple" de N sous forme de fraction rationnelle, sans simplification déraisonnable.***

1. On fixe $n \geq 2$.
   (a) Déterminer (en le démontrant) la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k$.
   (b) Démontrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
   (c) En déduire la valeur de N. ***Indication :*** *on pourra s'intéresser à la somme* $\sum_{k=0}^{n} k^3 - k$.
2. On pose, pour tout $n \geq 2$:
   $$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) \\ &= (1\times 2\times 3) + (2\times 3\times 4) + (3\times 4\times 5) + \ldots + (n-1)n(n+1) . \end{aligned}$$
   (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$N_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$
   (b) En déduire la valeur de N.

♦ Exercice 2

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \textit{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k a_{n-k} .$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3 et S_0, S_1, S_2, S_3. Quelle conjecture est–on tenté de faire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :
   $$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_k a_{n-k} .$$
   (b) En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Établir que :
   $$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n .$$
   (b) En déduire que $S_n = a_{n+1}$. On pourra raisonner par récurrence.
5. Démontrer par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

⧫ En vrac : quelques propriétés liées aux nombres

L'objectif des exercices qui suivent est de démontrer quelques propriétés élémentaires des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$.

– I –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$; démontrer que l'entier $n(n+1)$ est pair. . .
   (a) . . . en utilisant une somme ;
   (b) . . . **sans** utiliser de somme.
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Démontrer que le produit $\prod_{j=0}^{k-1}(n+j)$ est divisible par k.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner (en justifiant) trois diviseurs entiers positifs (différents de 1) de $n(n+1)(2n+1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; démontrer que $\sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

– II –

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n!\,.$$

– III –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que n est pair si et seulement si n^2 l'est.
2. On suppose dans cette question que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, *i.e* que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ n'ayant aucun facteur commun.
   (a) Justifier que p^2 est pair.
   (b) Aboutir à une contradiction. Que conclure ?
3. De façon plus générale, démontrer que si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.