Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé. Toute question non traitée pourra être admise pour usage ultérieur. **Ce sujet comporte 2 pages.**

♦ Une logique "différente" (restitution DL 1)

Ce problème a pour objet l'étude d'un exemple de logique tri–valuée. Plus précisément, on autorise désormais à une assertion donnée **trois** valeurs de vérité possibles :

- "vrai", noté **V** ;
- "faux", noté **F** ;
- "indéterminé", noté **I**.

Cela change évidemment les tables de vérité des connecteurs usuels, que l'on donne ci–ensuite, pour deux assertions P et Q.

P	Q	$P \wedge Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
V	**I**	**I**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**
F	**I**	**F**
I	**V**	**I**
I	**F**	**F**
I	**I**	**I**

P	Q	$P \vee Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
V	**I**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**
F	**I**	**I**
I	**V**	**V**
I	**F**	**I**
I	**I**	**I**

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
V	**I**	**I**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**
F	**I**	**V**
I	**V**	**V**
I	**F**	**I**
I	**I**	**V**

P	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**
I	**I**

✖ **Toute affirmation doit être démontrée, même si elle semble "évidente". Soyez méfiants...**

1. Soient P, Q, R trois assertions. Démontrer les équivalences suivantes :
   (a) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$;
   (b) $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$.
2. (a) Démontrer que les lois de de Morgan restent vérifiées en logique tri–valuée.
   (b) En déduire que pour toutes assertions P, Q, R on a :
      i. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$;
      ii. $(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$.
3. (a) Rappeler le résultat du cours permettant d'exprimer une implication à l'aide d'un "$\vee$".
   (b) Démontrer que ce résultat n'est plus vrai en logique tri–valuée.
   (c) Quelle méthode de démonstration classique doit alors être modifiée ? Expliquer.
4. (a) Soient P et Q deux assertions. A–t–on équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$?
   (b) Que peut–on en déduire concernant une certaine méthode de démonstration vue en cours ?

Définition 1.

*Une **tautologie** est une assertion qui est toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.*

5. (a) En logique classique, si P est une assertion alors $P \vee \overline{P}$ est une tautologie. Démontrer que ce n'est plus le cas en logique tri–valuée.
   (b) Par conséquent, quel type de démonstration n'est–il plus acceptable d'utiliser en logique tri–valuée ? Expliquer.

♦ Segments de $\mathbb{R}$

Définition 2.

> *On appelle* ***segment*** *tout intervalle fermé de la forme $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle que l'on a alors*
>
> $$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \ .$$

1. (a) Donner un exemple de segment ainsi qu'un exemple de partie de $\mathbb{R}$ n'étant pas un segment.
   (b) Exprimer en français l'égalité $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$.
   (c) Que se passe–t–il si $a > b$?
2. (a) La réunion de deux segments est–elle un segment ? Même question pour l'intersection.
   (b) Soit $S = [a, b]$ un segment ; l'ensemble $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ est–il un segment ?
   (c) L'ensemble $\{a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ est–il un segment ?
3. Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$ si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda)y \in E \ .$$

   (a) Écrire la négation de la propriété $(\mathscr{P}_1)$.
   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Montrer qu'alors

$$\forall \lambda \in [0, 1],\ x \leq \lambda x + (1 - \lambda)y \leq y \ .$$

   (c) En déduire que tout segment vérifie la propriété $(\mathscr{P}_1)$.
   (d) Tout ensemble vérifiant la propriété $(\mathscr{P}_1)$ est–il un segment ?
4. Dans toute la suite, on dira qu'un ensemble $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathscr{P}_2)$ si :

$$\exists m, M \in E,\ \forall x \in E,\ (m \leq x) \wedge (x \leq M) \ .$$

   (a) Écrire la négation de la propriété $(\mathscr{P}_2)$.
   (b) Donner un exemple d'ensemble vérifiant la propriété $(\mathscr{P}_2)$ ainsi qu'un exemple d'ensemble ne la vérifiant pas.
   (c) Montrer que tout segment vérifie la propriété $(\mathscr{P}_2)$.
   (d) Montrer que si E vérifie la propriété $(\mathscr{P}_2)$ pour deux réels m et M donnés alors $E \subset [m, M]$.
5. Faire la synthèse de cette partie en démontrant la proposition suivante.

> **Proposition 1.** *Soit E un ensemble. Alors :*
>
> $$E \text{ vérifie } (\mathscr{P}_1) \wedge (\mathscr{P}_2) \quad \Leftrightarrow \quad E \text{ est un segment.}$$