Ce devoir est à rendre pour le lundi 3 janvier 2022.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Une construction de $\mathbb{C}$

On fixe dans cet exercice la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on s'intéresse aux propriétés de l'ensemble

$$\widehat{\mathbb{C}} = \{aI_2 + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}\} \; .$$

1. Vérifier que $J^2 = -I_2$.
2. Démontrer que $\widehat{\mathbb{C}}$ est un sous–anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que $\widehat{\mathbb{C}} = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Justifier que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $M(a,b) + M(c,d) = M(a+c, b+d)$
   (c) Démontrer que pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $M(a,b)M(c,d) = M(ac - bd, ad + bc)$.
   (d) En déduire que $\widehat{\mathbb{C}}$ est un corps.
4. On définit l'application suivante :
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ x + iy &\mapsto M(x,y) \end{aligned} \quad .$$
   Montrer que ϕ est un isomorphisme d'anneaux.