Ce devoir est à rendre pour le mercredi 8 décembre 2021.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Extrait Bac Métropole 2018

– I –

On considère l'équation suivante dont les inconnues x et y sont des entiers naturels.

$$x^2 - 8y^2 = 1 \qquad (\mathscr{E})$$

1. Déterminer un couple solution (x, y) dans $\mathbb{N}^2$.
2. On définit les suites d'entiers naturels $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{array}\right. , \quad \text{et pour tout } \ n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{array}\right.$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est solution de l'équation (E).

   (b) Démontrer que la suite $(x_n)_n$ est à valeurs strictement positives et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} > x_n$.
3. En déduire que l'équation $(\mathscr{E})$ admet une infinité de couples solutions.

– II –

Définition 1. *Un entier naturel n est appelé un nombre puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.*

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la partie I, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.
2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$.
   Montrer que l'entier naturel $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.
3. Montrer que si (x, y) est un couple solution de l'équation $(\mathscr{E})$ définie dans la partie I, alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.
4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.