Ce devoir est à rendre pour le mercredi 24 novembre 2021.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

Automorphismes intérieurs, centre

Soit G un groupe (noté multiplicativement). Pour $a \in G$, on pose :

$$\begin{aligned} \tau_a : G &\to G \\ x &\mapsto axa^{-1} \ . \end{aligned}$$

1. Soient $a, b \in G$.
   (a) Vérifier que τ_a est un morphisme du groupe G.
   (b) Démontrer que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
   (c) Montrer que τ_a est un automorphisme de G et déterminer son inverse.
2. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Int}(G) = \{\tau_a \mid a \in G\}$ est un sous groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.
3. On appelle **centre** du groupe G l'ensemble $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ xg = gx\}$.
   (a) Démontrer que $Z(G)$ est un sous–groupe de G.
   (b) À quelle condition sur G a–t–on $Z(G) = G$?
   (c) Que dire de τ_a, lorsque $a \in Z(G)$?