

**Ce devoir est à rendre pour le mercredi 20 octobre 2021.**

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

### NORME INFINIE D'UNE FONCTION BORNÉE

Dans tout ce devoir, on fixe un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  non vide et on pose :

$$\mathcal{B} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M\}.$$

1. Démontrer qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $\mathcal{B}$  si et seulement si elle est majorée et minorée.
2. Soit  $f \in \mathcal{B}$ ; montrer que l'ensemble suivant admet une borne supérieure :

$$\text{Abs}(f) = \{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

**Dans toute la suite, si  $f \in \mathcal{B}$ , on notera  $\|f\|_\infty = \sup \text{Abs}(f)$ . Ce nombre est appelé norme infinie de la fonction  $f$ .**

3. Soient  $f, g \in \mathcal{B}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Démontrer que  $(\|f\|_\infty = 0) \Leftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle})$ .
  - (b) Montrer que si  $|f| \leq |g|$  alors  $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ .
  - (c) i. Montrer que
 
$$\forall x \in I, |\lambda f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty.$$
  - ii. Soit  $z$  un nombre réel tel que  $z < |\lambda| \|f\|_\infty$ . Démontrer que si  $\lambda \neq 0$ , il existe un réel  $x \in I$  tel que
 
$$\frac{z}{|\lambda|} < |f(x)|.$$
  - iii. En déduire que  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ .
  - (d) i. Montrer que
 
$$\forall x \in I, |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$
  - ii. En déduire que  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .
4. À l'aide d'une étude de leurs variations, déterminer la norme infinie des fonctions suivantes définies sur  $I = ]0, 1[$  :
  - (a)  $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ ;
  - (b)  $g : x \mapsto \arctan(1 - x^2)$ ;
  - (c)  $h : x \mapsto \text{ch}(\text{sh}(x))$ .