

Ce devoir est à rendre pour le lundi 4 octobre 2021.

Toute réponse non justifiée sera considérée comme vide. À l'inverse, tout raisonnement, même non abouti, sera valorisé.

FONCTIONS INDICATRICES

Dans tout ce devoir, on fixe un ensemble E quelconque. On rappelle que si $A \in \mathcal{P}(E)$, l'indicatrice de A est la fonction suivante :

$$\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} .$$

1. On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ des applications de E dans $\{0, 1\}$.
 - (a) Lister les éléments de \mathcal{F} dans le cas où $E = \{0, 1\}$.
 - (b) Démontrer que si E contient strictement plus de deux éléments, \mathcal{F} ne contient aucune bijection.
2. (a) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$; démontrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.
 - (b) Soit $f \in \mathcal{F}$; montrer qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f = \mathbb{1}_A$.
 - (c) En déduire que l'application

$$\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}$$
$$A \mapsto \mathbb{1}_A$$

est une bijection.