SEMAINE 10

▶ Limites, continuité

- notion de voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$, intersection de voisinages ;
- pour tous $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $x \neq y$, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$;
- limite d'une fonction en un point (définie via les voisinages), transcriptions quantifiées "en ε, δ" ;
- notion locale de continuité, fonctions continues sur un intervalle ;
- unicité de la limite, une fonction ayant une limité finie en un point est bornée au voisinage de ce dernier ;
- les fonctions usuelles sont continues sur les ensembles *ad–hoc* ;
- opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition ;
- passage à la limite dans les inégalités, théorème d'encadrement ;
- caractérisation séquentielle de la limite ;
- limites directionnelles, cas particulier des fonctions monotones ;
- anneau $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur un intervalle I, stabilité par combinaison linéaire et composition (lorsque cette dernière est possible) ;
- prolongement par continuité d'une fonction en un point ;
- théorème des valeurs intermédiaires, image d'un intervalle par une fonction continue ;
- une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ;
- une fonction continue injective est strictement monotone, théorème de la bijection ;
- brève extension aux fonctions à valeurs complexes des résultats appropriés.

✖***Aucune connaissance n'est exigible des étudiants sur les sujets suivants : continuité uniforme, théorème de Heine, fonctions lipschitziennes.***

▶ Questions de cours (*démonstrations*)

- tout énoncé ou définition est exigible ;
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap W = \emptyset$;
- composition de limites ;
- caractérisation séquentielle de la limite ;
- TVI (cas où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifie $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$).