Groupe de Poincaré

Arnaud Girand

19 avril 2011

Dans tout cet exposé, (X, τ) désigne un espace topologique.

1 Chemins, homotopie

Définition 1.1 (Chemin)
Soient $x, y \in X$.
On appelle chemin d'extrémités x et[1] y (dans X) toute application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Définition 1.2 (Homotopie)
Soient γ_0, γ_1 deux chemins d'extrémités $x, y \in X$.
On appelle homotopie de γ_0 à γ_1 toute application $h : [0,1]^2 \to X$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) h *est continue ;*
(ii) $h(0, .) = \gamma_0$ *;*
(iii) $h(1, .) = \gamma_1$ *;*
(iv) $\forall s \in (0,1)$, $h(s, .)$ *est un chemin d'extrémités* x *et* y.

Si une telle application existe, on dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes, ce que l'on note $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

☞ Si l'on autorise nos chemins à partir de n'importe quel segment $[a, b]$, on peut montrer que tout tel chemin est homotope à un chemin partant de $[0, 1]$.

Proposition 1.1
Soient $x, y \in X$.
La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins d'extrémités x et y.

✍ On notera $S(x, y)$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.

Définition 1.3 (Juxtaposition)
Soient $x, y, z \in X$.
Soit γ_0 un chemin d'extrémités x et y.
Soit γ_1 un chemin d'extrémités y et z.
On appelle juxtaposition de γ_0 et γ_1 le chemin[2] suivant, d'extrémités x et z :

$$\gamma_0.\gamma_1 : t \mapsto \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

✍ La juxtaposition des chemins est clairement, lorsqu'elle est bien définie, associative. De plus, si on note (pour $x \in X$) ε_x le chemin constant égal à x, alors pour tout chemin γ_0 (resp. γ_1) partant de (resp. arrivant en) x, on a $\varepsilon_x.\gamma_0 = \gamma_0$ (resp. $\gamma_1.\varepsilon_x = \gamma_1$).

Proposition 1.2
La juxtaposition est compatible avec la relation d'homotopie.

1. Dans le reste de cet exposé, on considérera pour plus de confort que ce "et" n'est pas commutatif. Le lecteur pointilleux vérifiera qu'il n'est pas difficile de faire changer de sens un chemin.
2. Vérification immédiate.

2 Groupe de Poincaré

Donnons nous à présent un point $x_0 \in X$. L'espace (X, τ, x_0) (que nous nous empresserons de noter —abusivement !— (X, x_0)) constitue alors un espace topologique pointé.

Définition 2.1 (Lacet)
On appelle lacet dans (X, x_o) tout chemin d'extrémités x_0 et x_0 dans X.

Proposition 2.1 (Groupe de Poincaré)
L'ensemble $S(x_0, x_0)$ forme un groupe pour la loi de juxtaposition, appelé groupe de Poincaré et noté $\tilde{\pi}_1(X, x_0)$.

Proposition 2.2 (Changement de point de base dans le cas connexe par arcs)
Soient $x, y \in X$.
Si x et y appartiennent à la même composante connexe par arcs de X, alors :

$$\tilde{\pi}_1(X, x) \cong \tilde{\pi}_1(X, y)$$

Démonstration : Soit $\beta \in S(x, y)$. On a alors l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi_\beta : \tilde{\pi}_1(X, x) &\to \tilde{\pi}_1(X, y) \\ \gamma &\mapsto \beta.\gamma.\beta^{-1} \end{aligned}$$

Où $\beta^{-1} : t \mapsto \beta(1-t)$ "est" le *chemin inverse* de β (modulo passage au quotient).

Définition 2.2 (Espace simplement connexe par arcs)
L'espace X est dit simplement connexe par arcs si :

(i) X est connexe par arcs ;

(ii) il existe un point $x \in X$ tel que le groupe $\tilde{\pi}_1(X, x)$ soit trivial.

☞ Il découle immédiatement du point (ii) que pour tout $x \in X$, le groupe $\tilde{\pi}_1(X, x)$ est trivial.

Définition 2.3 (Espace localement simplement connexe par arcs)
Un espace topologique est dit localement simplement connexe par arcs si tout point y admet une base de voisinages simplement connexes par arcs.

Fonctorialité du groupe de Poincaré :

Soient (Y, y_0) un espace topologique pointé et soit $f : X \to Y$ un morphisme entre ces deux espaces (i.e une application continue vérifiant $f(x_0) = y_0$). Alors pour tout lacet γ dans (X, x_0), $f \circ \gamma$ est un lacet dans (Y, y_0) et l'application $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ est compatible avec la relation d'homotopie et la juxtaposition. Ainsi, par passage au quotient, on obtient un morphisme de groupe :

$$\pi(f) : \tilde{\pi}_1(X, x_0) \to \tilde{\pi}_1(Y, y_0)$$

De fait, $(\tilde{\pi}_1, \pi)$ est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans celle des groupes.

Proposition 2.3
Soit (Y, y_0) un espace pointé.
Alors :

$$\tilde{\pi}_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \tilde{\pi}_1(X, x_0) \times \tilde{\pi}_1(Y, y_0)$$

Démonstration : On vérifie que le morphisme défini par les projections (via l'application π précédemment évoquée) est un isomorphisme.

3 Lien avec le groupe fondamental

Proposition 3.1 (Relèvement d'un chemin)
Soit $(\mathcal{R}, p)$ un relèvement de X.
Soient $x, y \in X$ reliés par un chemin γ.
Soit $z \in \mathcal{R}(x)$.
Alors il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ d'origine z dans $\mathcal{R}$,appelé relevé de γ en z, tel que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Soit $\mathcal{R}$ un revêtement de X. Alors le groupe $\tilde{\pi}_1(X, x_0)$ agit sur la fibre $\mathcal{R}(x_0)$ de la façon suivante : si $\gamma \in \tilde{\pi}_1(X, x_0)$ et $x \in \mathcal{R}(x_0)$ alors on définit $\gamma.x$ comme étant $\tilde{\gamma}(1)$, où $\tilde{\gamma}$ est le relevé de γ en x. En particulier, pour $\gamma \in \tilde{\pi}_1(X, x_0)$, l'application $\gamma_{\mathcal{R}} : x \mapsto \gamma.x$ est une permutation de $\mathcal{R}(b_0)$. De plus, si $\mathcal{R}'$ est un revêtement de X et que $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ est un morphisme de revêtements, l'application induite $f : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}'(x_0)$ vérifie que :

$$\forall x \in \mathcal{R}(x_0), \forall \gamma \in \tilde{\pi}_1(X, x_0),\ f(\gamma.x) = \gamma.f(x)$$

Et donc les $\gamma_{\mathcal{R}}$ forment un automorphisme du foncteur $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}(x_0)$, donc un élément $\gamma_{.} \in \pi_1(X, x_0)$.

Théorème 3.2
Soit X un espace localement simplement connexe par arcs.
Soit $x_0 \in X$.
Alors l'application $\varepsilon : \gamma \mapsto \gamma_{.}$ est un isomorphisme de groupes entre $\tilde{\pi}_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_0)$.

"Démonstration" du théorème 3.1 :

Avertissement sans frais : Ce qui suit n'est qu'une esquisse de preuve, détaillant les étapes majeures du raisonnement, avec juste ce qu'il faut de détails pour vous permettre de briller en société (et me permettre de vous faire croire que je sais de quoi je parle). Je vous renvoie donc sans ménagement au livre des Douady ([DD05]) pour la preuve complète.

Proposition 3.3
Soit (X, x_0) un espace pointé localement connexe par arcs admettant un revêtement pointé universel.
Alors le morphisme ε est surjectif.

Démonstration : Soit $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ et soit (E, t) un revêtement pointé universel de (X, x_0). X est localement connexe par arcs donc E également. Comme ce dernier est connexe, alors E est connexe par arcs et donc il existe un chemin ν reliant t à $u := \gamma_E(t)$. Ainsi, si $p : E \to X$ est la projection canonique, $p \circ \nu$ est un lacet dans (X, x_0), dont on notera α la classe dans $\tilde{\pi}_1(X, x_0)$. On a alors $\alpha.t = u$ d'où $\varepsilon(\alpha)(t) = \gamma(t)$, d'où $\varepsilon(\alpha) = \gamma$ car $\pi_1(X, x_0)$ opère transitivement sur $E(x_0)$.

Il nous reste donc à démontrer que tout ouvert localement simplement connexe par arcs admet un revêtement pointé universel pour avoir la surjectivité de ε. Mieux, une construction particulière d'un tel revêtement va nous permettre de démontrer également l'injectivité de ε.

Posons tout d'abord, pour $x \in X$, $S(x) := S(x_0, x)$ et :

$$S := \bigcup_{x \in X} S(x)$$

Enfin, notons $p : S \to X$ qui envoie $S(x)$ sur x pour $x \in X$. Pour tout ouvert U connexe par arcs de X, on définit une relation d'équivalence $\sim_U$ sur $S_{|_U}$ comme suit : si γ_0 et γ_1 sont deux éléments de $S_{|_U}$, on dit que $\gamma_0 \sim_U \gamma_1$ si $\beta.\gamma_0 = \gamma_1$, où β est l'unique classe de $S(p(\gamma_0), p(\gamma_1))$ contenant tous les chemins d'extrémités $p(\gamma_0)$ et $p(\gamma_1)$ dans U. Posons à présent $F_U = S_{|_U}/ \sim_U$ et appelons χ la projection canonique de $S_{|_U}$ sur F_U. On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.1
On a les résultats suivants :

(i) l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} t_U : S_{|_U} &\to U \times F_U \\ \gamma &\mapsto (p(\gamma), \chi(\gamma)) \end{aligned}$$

(ii) si $V \subset U$ est un ouvert simplement connexe par arcs, l'application $i : F_V \to F_U$ induite par l'injection canonique $S_{|V} \hookrightarrow S_{|V}$ est bijective.

De ce lemme, on déduit une topologie sur S de la façon suivante : on munit F_U de la topologie discrète et $U \times F_U$ de la topologie produit. On note alors τ_U la topologie sur $S_{|U}$ obtenue en transportant celle de $U \times F_U$ via t_u. De par le (ii) du lemme précedent, si $V \subset U$ est un ouvert simplement connexe par arcs alors τ_V est la topologie induite par τ_U sur V. Un lemme de recollement des topologies, que le lecteur acharné trouvera dans [DD05], permet de déduire de cette construction qu'il existe une unique topologie $\tilde{\tau}$ sur S qui induit τ_U sur $S_{|U}$ pour tout ouvert U simplement connexe par arcs. Muni de cette topologie et de la projection p, S est un revêtement, dont on peut montrer qu'il est universel, de X. D'où la surjectivité de ε.

Proposition 3.4
L'action de $\tilde{\pi_1}(X, x_0)$ sur $S(x_0) = \tilde{\pi_1}(X, x_0)$ est simplement transitive (i.e transitive et libre).

Ainsi , si γ est un élément non neutre de $\tilde{\pi_1}(X, x_0)$, il opère de façon non triviale sur $S(x_0)$ et donc $\gamma \notin \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. D'où l'injectivité.

Références

[DD05] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes.* Cassini, 2005.