Espaces de Schwartz et distributions tempérées

[Zui] Zuily, Queffelec, Théorie des distributions
[Bony] Jean-Saul Pontre, Th. des distr.
[RAU] Rauch, PDE
[HiR] Hindi-Lacombe

[BOST]
Bost X-ups 2002

[ZU.]

$p \in \mathbb{N}^*$ fixé

I) Espace de Schwartz

1) Définitions - propriétés

déf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p), \forall (\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^p)^2, \sup_{x \in \mathbb{R}^p} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty \}$
On l'appelle espace de Schwartz (fonctions à décroissance rapide).

Ex. • $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$
• $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$
• Si P est un polynome et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$, alors $x \to P(x) f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$

Prop. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^p$,
$$\| \ \|_{\alpha,\beta} \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^p} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \end{cases}$$
est une semi-norme sur $S(\mathbb{R}^p)$

déf (CV dans $\mathcal{S}$) Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$
on dit que $(g_n)_n$ converge vers g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ $(g_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g)$
si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^p$ $\| g_n - g \|_{\alpha,\beta} \to 0$

Prop. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^p)$ dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$

Thm : Munie de la topologie associée, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ est complet
Il est de plus métrisable où la distance est donnée par
$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^p} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\| g - f \|_{\alpha,\beta}}{1 + \| g - f \|_{\alpha,\beta}}$$

2) Opérations sur $S(\mathbb{R}^p)$

Prop. La dérivation, la multiplication par un polynôme, la multiplication par une fonction de $S(\mathbb{R}^p)$ sont des endomorphismes continus de $S(\mathbb{R}^p)$

déf-prop. L'application transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}$ ou $\wedge$, est définie par $\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)\,dx$
C'est un endomorphisme continu de $S(\mathbb{R}^p)$

Propriétés de la transformée de Fourier
Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^p)^2$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, $h \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Notons σ_λ $f \to f(\lambda\, .)$ dilatation de λ
τ_h $f \to f(. - h)$ translation de h
σ_λ et τ_h sont des endomorphismes continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ et on a
- $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = \xi^\alpha i^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$
- $\mathcal{F}(x \mapsto x^\beta f(x))(\xi) = (-i)^\beta \partial^\beta \mathcal{F}(f)(\xi)$
- $\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{-ih\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$
- $\mathcal{F}(\sigma_\lambda f) = |\lambda|^{-p} \sigma_{1/\lambda}(\hat{f})$

Ex : Soit $g : x \to e^{-|x|^2/2}$
$\mathcal{F}(g) = g$

Prop (Inv de Fourier) Notons $\mathcal{F}^*$ $S(\mathbb{R}^p) \to S(\mathbb{R}^p)$
$f \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi)\,d\xi$
Alors $\forall f \in S(\mathbb{R}^p)$, $f = \mathcal{F}^* \mathcal{F}(f)$

Cor. $\mathcal{F}^c$ est un opérateur linéaire continu bijectif d'inverse $\mathcal{F}^*$

- Pour $f, g \in S(\mathbb{R}^d)$

$$\int u(x)\overline{v}(x)\,dx = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi$$

- $\mathcal{F}^c$ se prolonge en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R}^d)$

Thm (Formule de Poisson) [DEV 1]

Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ Alors $2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

Appl $\Rightarrow t \mapsto \theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-t\pi n^2}$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(1/t)$$

Prop (Heisenberg) Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Notons $V(f) = \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 f(x)\,dx$ Alors

$$V(f)\,V(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

Prop: La convolution par une fonction $g \in S(\mathbb{R}^d)$ est un endomorphisme continu de $S(\mathbb{R}^d)$ et

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}$$

III) Distributions tempérées

1) Définitions

déf: Une distribution tempérée est une application linéaire continue de $S(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{C}$. L'espace des distributions tempérées est noté $S'(\mathbb{R}^d)$

Prop: Soit $T : S(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. T est une distribution tempérée ssi $\exists (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq n} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

Ex: - Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est majorée par un polynôme définit une distribution tempérée T_f $g \mapsto \int fg$

- $\delta \in S'(\mathbb{R}^d)$; $H \in S'(\mathbb{R}^d)$

- $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_n \in S'(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow (a_n)$ avec croissance lente

- Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ Alors $\varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ définit une distribution tempérée, notée $vp(1/x)$

Rq $e^x \notin S'(\mathbb{R})$ mais $e^x e^{i e^x} \in S'(\mathbb{R})$

déf: (Cv dans S') Soit $(T_n)_n$ une suite de $S'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in S'(\mathbb{R}^d)$

On dit que T_n converge vers T dans S' si $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$

Ex: Soit $p \in [1, +\infty[$ $(f_n)_n \in L^p$ et $f \in L^p$ tels que $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Alors $f_n \xrightarrow{S'} f$

2) Opérations

Rq On définit les opérations sur $S'(\mathbb{R}^d)$ en passant à la transposée des opérations sur $S(\mathbb{R}^d)$ (en particulier, on multiplie par un peu la dérivation) $\mathcal{E}$ sont alors des endomorphismes de $S(\mathbb{R}^d)$ continus qui vérifient les relations que sur S

Formellement, si $T : S \to S$, on définit $T^t : S' \to S'$ par

$$\langle T^t g, \varphi\rangle = \langle g, T\varphi\rangle$$

Ex: multiplication par un polynôme une fonction de S, transformation de Fourier

[GAU]

[HIR]

Ex. $H' = \delta_0$

Thm: - Les distributions tempérées vérifiant $T' = 0$ sont les constantes
- Les distributions tempérées vérifiant $xT = 0$ sont de la forme $c\delta_0$

Ex. $\mathcal{F}1 = \delta_0$; $\mathcal{F}H = \frac{1}{-i\sqrt{2\pi}} vp\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\hat{\delta}_0$

Thm La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ sur S' est un endomorphisme bijectif bicontinu.

déf. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$. On définit la transformée de Fourier partielle $\tilde{\mathcal{F}}$ par $\tilde{\mathcal{F}} : S(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p) \longrightarrow S(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p)$

$$f(t,x) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(t,x) e^{-ix.\xi}\, dx$$

Cor: $\tilde{\mathcal{F}}$ se définit sur $S'(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p)$ et c'est un isomorphisme bicontinu.

III Applications

1) En équation différentielle et EDP

déf On appelle équation de convolution une équation de la forme $A * u = f$ où A est une distribution à support compact et $f \in S(\mathbb{R}^n)$ donné, u l'inconnue

Ex. - $m \in \mathbb{N}$, $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in \mathbb{C}^{|\alpha| \leq m}$

$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$

$A * u = f$ correspond à l'équation $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f$

- $A = \Delta\delta_0$ $A * u = f$ correspond à $\Delta u = f$

déf. Une distribution tempérée E est appelée solution fondamentale / élémentaire de A si $A * E = \delta_0$

Intérêt: Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et E une solution élémentaire de A

Alors $u = E * f$ est solution de $A * \cdot = f$

Exemple: • Équation de Poisson $\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^3$.

Une solution élémentaire est $E_f = \frac{-1}{4\pi r}$ où $r = |x|$

• Équation de Schrodinger. $A = \partial_t - i\Delta_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ [DEV]

Une solution élémentaire est: $\langle E, \phi \rangle = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-i m \pi/4}}{(\sqrt{4\pi t})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(t,x) e^{\frac{i|x|^2}{4t}} dx\right) dt$

2) En théorie des nombres [Bost]

Notation $\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{t \,/\, \zeta(1+t) = c\}$

posons $\zeta_{\mathbb{P}}(1+it) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \zeta_{\mathbb{P}}(1+\varepsilon+it)$; $\ell(t) = \zeta_{\mathbb{P}}(1+2i\pi t)$

Prop: $\hat{\ell}$ est la transformation de Fourier de la distribution tempérée $u = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}\delta_{\ln p}$

i) $-\frac{\ell(t)}{1+2i\pi t}$ ———— de $x \mapsto e^{-x}\pi(e^x)$

Prop i) donne la non annulation de ζ sur $\mathrm{Re}(s) = 1$

ii) donne le théorème des nombres premiers

[Bony]