# 251 : Indépendances d'évènements et de variables aléatoires. Exemples

## I Définitions et critères d'indépendance [BAR]

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace proba.

### 1) Définitions

**Déf :** (i) une famille quelconque d'évènements $(A_i) \in \mathcal{A}^I$ est mutuellement indep. si $\forall J \subset I$ fini $P(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j \in J} (P(A_j))$

**Ex :** jet de 2 dés 1 bleu 1 rouge
$A = \{\text{rouge} \to \text{impair}\}$ $B = \{\text{bleu} \to \text{impair}\}$ $C = \{\Sigma \text{ des 2 dés} \to \text{impair}\}$
$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B, C) = \frac{1}{4}$ mais
$P(A \cap B \cap C) = \emptyset \neq \frac{1}{8}$ $A, B, C$ sont 2 à 2 indep. mais pas mutuellement indépendants.

**Déf :** (ii) Une famille de sous-tribus $(\mathcal{A}_i) \in (\mathcal{P}(\mathcal{A}))^I$ est mutuellement indépendante si $\forall A_i \in \mathcal{A}_i$ $(A_i) \in \mathcal{A}^I$ est mutuellement indépendante.

**Déf :** (iii) $(X_i)$ famille de v.a de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathcal{B})$ est mutuellement indépendante si la famille des tribus engendrées par les $X_i$ est mutuellement indépendante
i.e $\forall J \subset I$ fini : $\forall B_j \in \mathcal{B}$ $P(X_j \in B_j | j \in J) := P(\bigcap \{X_j \in B_j\}) = \prod_{j \in J} P(X_j \in B_j)$

**Ex :** jet de 2 dés $X_a$ : résultat du dé rouge
$X_b$ : ——————— bleu
$X_a$ et $X_b$ sont indépendants.

**Rq :** L'indépendance de tribus est difficile à prouver en général, pour la prouver en pratique :

**Prop :** Si $C_1$ et $C_2$ sont 2 algèbres indépendantes (même déf que pour les tribus) alors $\sigma(C_1)$ et $\sigma(C_2)$ sont indépendantes.

### 2) Indépendance de v.a. et corrélation

**Prop :** $(X_1, \dots X_d)$ famille de v.a ind réelles alors $P(X_1, \dots X_d)$ la loi du vecteur aléatoire sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est égale au produit des lois marginales $P^{X_1} \otimes \dots P^{X_d}$
Réciproquement si $P(X_1 \dots X_d) = P^{X_1} \otimes \dots P^{X_d}$ alors $(X_1, \dots X_d)$ indépendantes.

**Ex :** Dans $\mathbb{R}^2$ $P^{X = (X_1, X_2)} = \frac{1}{4}\delta(-1,0) + \frac{1}{4}\delta(1,0) + \frac{1}{4}\delta(0,1) + \frac{1}{4}\delta(0,-1)$

| $X_2$ \ $X_1$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1/4 | 0 |
| 0 | 1/4 | 0 | 1/4 |
| 1 | 0 | 1/4 | 0 |

Alors $P(X = (0,0)) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(X_1 = 0) P(X_2 = 0)$
$X_1$ et $X_2$ ne sont donc pas indépendantes.

**Ex :** Indépendance non intuitive : Loi $\gamma$ et $\beta$ [DEV] [OUVR] p 74

**Ex :** Loi unif sur $[0,1]^2$ a pour lois marginales les lois unif sur $[0,1]$

**Corollaire :** $(X_i)_{i \in I}$ v.a réelles indep. si $\forall J \subset I$ fini $\forall \phi_j$ fonct. boréliennes tq $\phi_j(X_j)$ intégrables alors
$$E(\prod \phi_j(X_j)) = \prod (E(\phi_j(X_j))).$$

**Déf :** 2 v.a.r $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont non corrélées si
$E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0$
$\Leftrightarrow X - E(X)$ et $Y - E(Y)$ sont orthogonales. $\to Cov(X,Y)$

**Rq :** D'après ce qui précède on a $X, Y$ indépendantes $\Rightarrow X, Y$ non corrélées.

Contre-exemple : $Y = X^2$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $E(X) = 0$
$E(XY) = 0$
Ainsi $E(X)E(Y) = E(XY)$ mais $Y$ et $X$ ne sont pas indépendantes : $P(|X| \leq 1, Y \geq 1) = 0 \neq P(|X| \leq 1) P(Y \geq 1)$

### 3) Indépendance, fonction caractéristique et de répartition

**Déf :** $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$t \longmapsto E(e^{i\langle t, X \rangle})$ où $X$ v.a.r d-dim

**Prop :** $(X_1, \dots X_n)$ de v.a.r est une famille indépendante ssi $\forall (t_1, \dots t_n) \in \mathbb{R}^n$ $\varphi_{(X_1, \dots X_n)}(t_1, \dots t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i)$

**Prop :** $(X_1, X_2)$ v.a.r $X_1, X_2$ indépendants ssi $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

### 4) Corrélation et vecteur gaussien

**Déf :** Un vecteur $X = (X_1, \dots X_d) : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est dit gaussien si $\forall \alpha \in \mathbb{R}^d$ $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i$ est v.a gaussienne (1-dim)
Dans ce cas $\Sigma \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}(\Sigma \alpha_i E(X_i), \Sigma \alpha_i \alpha_j Cov(X_i, X_j))$

**Prop :** Un vecteur gaussien est entièrement déterminé par $m = (E(X_i))$ et $\Gamma = (Cov(X_i, X_j))$

**Thm :** $X$ vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ de matrice de covariance $\Gamma$. $\Gamma$ diagonale ssi $(X_1, \dots X_d)$ indépendante

**Rq :** La condition $\Gamma$ diagonale est évidemment nécessaire (vrai dans le cas général), la réciproque fausse dans le cas général est vraie ici, néanmoins la condition vecteur gaussien est une condition forte :

**Cex :** Il ne suffit pas, pour que $X$ soit gaussien que ses marginales soient gaussiennes :
$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\varepsilon$ de Rademacher : $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$
$Z \perp\!\!\!\perp \varepsilon$ alors $(Z, \varepsilon Z)$ n'est pas gaussien mais de marginales gaussiennes.

## III. Nombre fini de v.a.r. indépendantes

### 1) Somme de va indépendantes [BAR]

Prop : $X, Y$ 2 var indep
La loi de la somme $X+Y$ est donnée par $P^X * P^Y$ où

Def : $\forall \phi$ borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, d(P^X * P^Y) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) \, dP^Y(y) \right) dP^X(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) \, dP^X(x) \right) dP^Y(y)$$

Prop :
- $P * \delta_0 = P$
- $P * Q = Q * P$
- $(P * Q) * R = P * (Q * R)$
- $P * (\lambda Q + (1-\lambda) R) = \lambda (P * Q) + (1-\lambda) P * R$

Prop : $X$ et $Y$ 2 var indep sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la fonction car de leur somme est donnée par $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Exemples :
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$ $\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
  $[\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}]$
- $X, Y$ indep à densité $f$ et $g$ alors $X+Y$ a pour densité $f * g$.

Rq : $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y \not\Rightarrow X, Y$ indépendants [Ouv2]
Par le contre exemple $Z = (X, Y)$ qui a pour densité
$$f(x,y) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_C(x,y) [1 + xy(x^2 - y^2)] \text{ où } C = [-1,1]^2$$

### 2) Retour sur les v.a. gaussiennes [Ouv2] Exo 13.3 et 13.4

On donne dans cette partie 2 caractérisations de lois gaussiennes.

Caractérisation des lois gaussiennes sur $\mathbb{R}$
$X$ et $Y$ 2 var admettant un moment d'ordre 2 de m̂ loi $\mu$ tq $E(X) = 0$ $E(X^2) = \sigma^2$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$.
$$\mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ ssi } \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Caractérisation des ~~va~~ gaussiennes : Théorème de Bernstein
$X, Y$ 2 var tq $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X + Y \perp\!\!\!\perp X - Y$ alors
$X$ est gaussienne
$Y$ est gaussienne

### 3) Lois infiniment divisibles [Cot] p135

Def :
- $R$ loi de proba sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est inf divisible si $\forall n \in \mathbb{N}^* \, \exists Q_n$ tq $R = Q_n^{*n}$
- De manière equivalente $X$ var est inf divisible si $\forall n \in \mathbb{N}^* \, \exists X_{1n} \dots X_{nn}$ iid tq $X \sim X_{1n} + \dots + X_{nn}$

Prop : $X$ inf divisible ssi $P_X$ l'est.

Prop : $X$ est inf divisible ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\varphi_X = (\varphi_n)^n \text{ où } \varphi_n \text{ est une fonction caractéristique}$$

Exemples :
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \longrightarrow X_{k,n} \sim \mathcal{N}(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \longrightarrow X_{k,n} \sim \mathcal{P}(\lambda/n)$
- $X \sim \gamma(a, \lambda) \longrightarrow X_{k,n} \sim \gamma(\frac{a}{n}, \lambda)$
- $X \sim \mathcal{E}(c) \longrightarrow X_{k,n} \sim \mathcal{E}(\frac{c}{n})$.

Le théorème suivant est plus compliqué à démontrer, néanmoins il fournit une formule générale pour la fonction caractéristique d'une va inf divisible.

Thm : $X$ est infiniment divisible ssi sa fonction caractéristique $\varphi$ est de la forme
$$\varphi(u) = e^{i\beta u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}} \exp\left( \int \left( e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \gamma(dx) \right)$$
où $\beta, \sigma \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma$ mesure finie ne chargeant pas l'origine.

## III Convergence de suites et indépendance

### 1) Convergence en loi de somme de va iid [CO]

**Prop :** $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $(X_n), X$ var.
Alors $(X_n)$ est tendue, ie $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ compact $K$ tq $(P(X_n \in K) \geq 1 - \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N})$

**Thm :** Helly : $(F_n)$ suite de fonctions de répartition $\exists$ $F$ croissante cont à gauche tq $0 \leq F \leq 1$ et une sous-suite $F_{n_k}$ tq $[F_{n_k}(t) \to F(t)$ en tout point $t$ de continuité de $F]$

**Thm :** Prohorov $\Phi$ une famille de proba $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ les prop suivantes sont équivalentes :
i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $K$ compact de $\mathbb{R}$ tq $[Q(K) \geq 1 - \varepsilon$ $\forall Q \in \Phi]$.
ii) De toute suite $(Q_n)$ d'elts de $\Phi$, $\exists$ $n_k$ $Q$ tq $Q_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{L}} Q$.

**Corollaire :** Si $S_n = X_{1,n} + \dots + X_{m,n}$ où $(X_{i,n})$ iid (à $n$ fixé) et $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} S$ alors $S$ est inf divisible.

**Rq :** Toutes les convergences considérées par la suite seront dans ce cadre là.

### 2) Loi faible des grands nombres [ZQ]

**Prop :** · Inégalité Markov
$X \in L^1$ $t > 0$ $P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$
· Inégalité Tchebycheff
$X \in L^2$ $t > 0$ $P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$

**Thm :** Loi faible des grands nombres
$X \in L^2$, $(X_n)_{n \geq 1}$ iid $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
alors $P(|\frac{S_n}{n} - E(X)| > t) \leq \frac{Var(X)}{n t^2}$ $\forall t > 0$
En particulier $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} E(X)$

Dans le cadre de la loi faible des grands nombres on peut démontrer le thm de Weierstrass sur $[0,1]$ par les polynômes de Bernstein :
Thm : $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq C\, \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ [DE] où $\omega$ module de continuité de $f$. De plus c'est optimal.

### 3) Lemme de Borel-Cantelli et loi forte des grands nombres [BAR]

**Def :** $(T_n)$ famille de tribus, indépendante. $\mathcal{A}_n = \sigma(T_n, T_{n+1}, \dots)$
$\mathcal{A}_\infty = \bigcap \mathcal{A}_n$ est tribu terminale.

**Thm :** loi du 0-1
Si $\mathcal{A}_\infty$ tribu terminale alors $\forall A \in \mathcal{A}_\infty$ $P(A) = 0$ ou $1$.

**Def :** $(A_n)$ suite d'événements $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n = \{A_n$ a lieu une inf de fois$\}$
On le note $A_n$ i.s. (inf souvent) on le note aussi $\limsup A_n$.

**Thm :** (Lemme de Borel-Cantelli)
$(A_n)$ suite d'événements
i) $\sum P(A_n) < +\infty \Rightarrow P(A_n \text{ i.s.}) = 0$
ii) Si $(A_n)$ indep alors $\sum P(A_n) = \infty \Rightarrow P(A_n \text{ i.o.}) = 1$.

Cex : ii) indep : $\Omega = [0,1]$ $A_n = ]0, \frac{1}{n}]$ alors $\sum P(A_n) = \infty$ et $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$.

**Thm :** (Loi forte des grands nombres)
$(X_i)$ suite iid tq $X_i \sim X$ $\forall i$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
alors $E(|X|) < +\infty$ ssi $\frac{S_n}{n} \to E(X)$ presque sûrement

Cex : Si $X_i \sim \mathcal{C}(c)$ alors $\frac{S_n}{n} \sim \mathcal{C}(c)$
donc $\frac{S_n}{n} \to X$ mais $E(|X|) = +\infty$.

**Exemple :** $U$ identité sur $[0,1]$ $\omega \in [0,1]$
$U(\omega) = \sum 2^{-i} U_i(\omega)$ dev dyadique de $U(\omega)$.
$U_i \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$ et $(U_i)$ indep.
$P(\omega : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} U_i(\omega) = \frac{1}{2}) = 1$ par loi forte des g.n.
Ainsi presque tout $\omega$ dans $[0,1]$ admet en moyenne autant de 0 et de 1 dans son développement dyadique.

### 4) Théorème central-limite [BAR]

**Thm :** central-limite $X_i$ iid $X_i \sim X$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
i) si $E(X^2) < +\infty$ alors $\frac{S_n - nE(X)}{\sqrt{n\, Var(X)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$
ii) si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi alors $E(X) = 0$ et $E(X^2) < +\infty$ et la loi limite est normale centrée de variance $Var(X)$.

Applications : · Critère empirique d'indépendance
· Statistique


Bibliographie : · [BAR] Ph Barbe, M Ledoux Probabilité
· [OUV2] Ouvrard Probabilités 2
· [Cot] Cottrell ... exercices de probabilités
· [ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation