247 : Exemples de problèmes d'interversion de limite

① DSE arctan(x)
($\arctan x = \int \frac{1}{1+t^2} dt$) [ROM] p.187

I – Résultats généraux sur les suites et séries de fonctions

① Autour de la convergence uniforme des suites de fonctions

Théorème (continuité) : Soit X un espace topologique, E un espace métrique, et (f_n) une suite d'applications de X dans E convergeant uniformément vers la fonction f. Si chacune des fonctions f_n est continue au point a de X (resp sur X), la fonction f est continue au point a (resp sur X).

[ROM] p.187 **contre-exemple** : la fonction $x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f non continue.

[ROM] p.189 **Corollaire** (séries) : Soit $\sum u_n$ une série uniformément convergente de fonctions de l'espace topologique X vers l'espace vectoriel normé E. Si les fonctions u_n sont continues au point a de X (resp sur X), la somme de $\sum u_n$ est continue en a (resp sur X).

[ROM] p.192 **Exemple** : La fonction $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ définit une fonction continue sur $]1,+\infty[$.

[ROM] p.187 **Théorème** (interversion de limites) : Soit X un espace topologique, $A \subset X$, $a \in \bar{A}$, E un espace métrique complet, et (f_n) une suite d'applications de A dans E convergeant uniformément sur A vers la fonction f. Si chaque f_n possède une limite ℓ_n au point a, alors la suite (ℓ_n) converge vers ℓ et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

[ROM] p.190 **Corollaire** : Soient $\sum u_n$ une série uniformément convergente de fonction de $A \subset X$ espace topologique vers l'espace vectoriel normé complet E.
Si les fonctions u_n ont une limite ℓ_n au point a, $\sum \ell_n$ converge et
$\lim_{x \to a} \sum u_n(x) = \sum \ell_n$.

[NOU] p.74 **Exemple** : En utilisant la relation $\cotan(a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 - n^2\pi^2}$, on montre $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

② Autour de la dérivabilité

a) suites et séries de fonctions

[ROM] p.188 **Remarque** : Une limite uniforme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ peut n'être pas dérivable (par exemple, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ CVU vers $|x|$ qui n'est pas dérivable en 0.
L'idée géométrique sous-jacente est que la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) ne donne aucun renseignement sur le comportement des pentes de f_n.

Théorème : Soit E un espace de Banach, et (f_n) une suite d'applications de classe C^1 du segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ dans E convergeant simplement vers la fonction f. Si la suite des dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$, f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $f' = g$.

Corollaire : Soit $\sum u_n$ une série simplement convergente de somme f de fonctions de classe C^1 de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ vers l'espace de Banach E. Si la série $\sum u_n'$ est uniformément convergente, f est de classe C^1 et sa dérivée est la somme de la série $\sum u_n'$.

Exemple : ζ est de classe C^∞.

Application du corollaire : formule sommatoire de Poisson. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x| \to \infty$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ où $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$.

b) Théorème de Schwartz

Théorème : Soit une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur U, continues en un point a de U. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

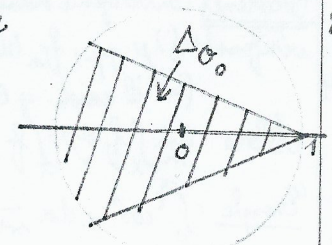
contre-exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

③ Autour des séries entières

Théorème d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$



Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

DVLPMT n°1

N] 50 **Exemple** : En appliquant ce résultat à la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, on en déduit
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

OU] 57 **Théorème** (taubérien faible) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = S$. Si $\boxed{a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = S$

II – Interversion limite-intégrale

① Cadre de l'intégrale de Riemann (basé sur une hypothèse d'uniformité)

N] 13 **Théorème** : Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors f est intégrable et $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

Corollaire : Si $\sum g_n$ est une série de fonctions intégrables d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge normalement sur $[a,b]$ alors
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right).$$

② Cadre de la théorie de la mesure

P] 7 **Théorème** (Beppo-Lévi) : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable et
$$\int_X \lim_n f_n \,d\mu = \lim_n \int_X f_n \,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

P] 132 **Théorème** (lemme de Fatou) : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives, alors $0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n \,d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \,d\mu \leq +\infty$.

NP] 132 **Application** : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et vérifiant $\sup_n \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

NP] 134 **Théorème** (convergence dominée) : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ vérifiant : (i) μ-pp, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$

(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que, pour tout $n\geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp.

Alors $\lim_n \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$ (et même $\lim_n \int |f_n - f|\,d\mu = 0$)

N] 81 **Exemple** : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarque : L'hypothèse de domination peut être vérifiée en l'absence de convergence uniforme : on se place sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1]$. On pose, $\forall n\geq 1$, $f_n(x) := \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right)$, $x \in [0,1]$. Les fonctions f_n sont continues, donc boréliennes et convergent λ-pp vers la fonction nulle mais pas uniformément. En revanche, $\forall x \in]0,1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} 1\!\!1_{]0,1]} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ donc par application du théorème de convergence dominée, $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. [BP] p.135

Théorème (application aux séries de fonctions) : Soient $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. [BP] p.137

a) Si les fonctions φ_n sont positives pour tout $n\geq 1$, alors $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n \,d\mu$

b) Si $\sum_{n\geq 1} \int |\varphi_n|\,d\mu < +\infty$ alors les fonctions φ_n, $\sum_{n\geq 1} |\varphi_n|$ et la fonction définie μ-pp $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ sont μ-intégrables. En outre, $\int_X \left(\sum_{n\geq 1} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X \varphi_n\,d\mu$.

③ Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème (continuité sous le signe intégrale) : Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$, $u_\infty \in E$. Si

(i) pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ [BP] p.138

(ii) μ-pp, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_∞,

(iii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que pour tout $u \in E$, $|f(u,x)| \leq g(x)$ μ-pp

alors la fonction $F(u) := \int_X f(u,x)\,\mu(dx)$ est définie en tout point $u \in E$ et est continue en u_∞.

Exemples : transformée de Fourier : soit $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ alors la fonction $\hat{f}$ définie en tout point u de $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,\lambda(dx)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ [BP] p.140

• convolution : soit $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, continue et bornée, alors $f * \varphi$, définie par $(f*\varphi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(u-x) f(x)\,\lambda(dx)$ est continue bornée. [BP] p.140

Théorème (Dérivation globale sur un intervalle ouvert I) : Sous les hypothèses

(i) pour tout $u \in I$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ [BP] p.142

(ii) μ-pp, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur tout l'intervalle I,

(iii) μ-pp, pour tout $u \in I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x)$ où $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ positive.

alors la fonction $F(u) := \int_X f(u,x)\,\mu(dx)$ est définie et dérivable sur tout l'intervalle I, de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,\mu(dx)$.

[BP] p.242

Exemples: • transformée de Fourier : si f et $(x \mapsto x f(x)) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(u) = i \int_{\mathbb{R}} e^{iux} x f(x) \lambda(dx) = i \widehat{x f(x)}(u)$.

• convolution : si $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ et φ dérivable, bornée à dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, alors $f * \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $(f * \varphi)'(u) = (f * \varphi')(u)$

[OA] p.67 ou [ZQ] p.309

Théorème (holomorphie sous le signe intégrale) : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \times X \to \mathbb{C}$. Supposons que

i) pour tout $z \in \mathcal{U}$, la fonction $x \mapsto f(z, x)$ est dans $L^1(X)$,

ii) il existe $N \subset X$, $\mu(N) = 0$ tel que pour $x \notin N$, $z \mapsto f(z, x) \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$

iii) pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe $g \in L^1$ positive, indépendante de z, telle que $|f(z, x)| \leq g(x)$, $\forall z \notin N$. Alors la fonction $F(z) = \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et pour tout $z \in \mathcal{U}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x)$$

ou [OA] p.83 [NOU] p.82

Exemple: Via des fonctions holomorphes, on montre que la transformée de Fourier d'une gaussienne définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} dx$ vaut $\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$

DVLPMT n°2 [ZQ] p.373 [OA] p.82

<u>Application des théorèmes de régularité à la fonction Γ</u> :

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

i) La définition ci-dessus a bien un sens

ii) $x \mapsto \Gamma(x)$ est une fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$

iii) La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $P = \{Re(z) > 0\}$.

iv) La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

III- Sommes multiples

[POM] p. 212

Remarque: l'interversion de $\int$ et $\int$, $\sum$ et $\sum$ découlent des théorèmes de Fubini. De façon générale, ces théorèmes expriment, dans le cas d'une mesure σ-finie et de l'absolue convergence, la possibilité d'intervertir deux sommations. Selon la mesure utilisée : continue, discrète... les résultats se traduisent en termes d'intégrales ou de sommes de séries.

Théorème (de Fubini) : Soit $(a_{m,n})$ une suite double de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_n \sum_m |a_{m,n}| = \sum_m \sum_n |a_{m,n}| \in [0, +\infty].$$

Si de plus $\sum_n \sum_m |a_{m,n}| < \infty$, alors $\sum_n \sum_m a_{m,n} = \sum_m \sum_n a_{m,n}$.

<u>contre-exemple</u> : $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^2 - n^2}{(m^2+n^2)^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m^2 - n^2}{(m^2+n^2)^2}$

<u>exemple:</u> $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$, $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$

Proposition (Produits de Cauchy). Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors le produit de leurs sommes est la somme d'une troisième série absolument convergente

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Cette série s'appelle produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$

Références

[POM] : Pommelet, "Agrégation de Mathématiques Cours d'analyse"

[NOU] : Nourdin, "Agrégation de Mathématiques épreuve orale" (donne les grandes idées du plan + exemples)

[GOU] : Gourdon, "Analyse" (1ère édition)

[BP] : Briane et Pagès, "Théorie de l'intégration"

[ZQ] : Queffélec Zuily, "Analyse pour l'agrégation" (3e édition) [OA] : Objectif Agrégation