241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

I- Convergences et propriétés conservées à la limite

① Modes de convergence, liens [GOU] p.220

Soient X un ensemble, (E,d) un espace métrique et $(f_n)_n$ suite de fonctions de X dans E.

Définitions

* $(f_n)_n$ converge simplement vers f (cvs) : $\forall x \in E, d(f_n(x), f(x)) \xrightarrow[n\infty]{} 0$
* $(f_n)_n$ converge uniformément (cvu) vers f : $\sup(d(f_n(x), f(x))) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Définition Soit E un evn complet et $(f_n)_n : X \to E$

* $\sum f_n$ converge normalement (cvn) si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Implications : dans un espace complet : cvn $\Rightarrow$ cvu $\Rightarrow$ cvs

Exemple $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ cvn donc cvu donc cvs pour $x > 1$

Contre-exemple [GOU] p221 $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ cvs vers la fonction nulle mais pas uniformément.

② Continuité, dérivabilité [GOU] p.222-224

Proposition

* Soient (E,d), (F,δ) espace métriques et $(f_n) : E \to F$

$$\left.\begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ continue en } x_0 \in E \\ - (f_n)_n \text{ cvu vers } f : E \to F \text{ sur } E \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

* Soit E un espace de Banach (evn complet)

$$\left.\begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N}, (f_n)\ C^1 : [a,b] \to E \\ - \exists x_0 \in [a,b] \text{ tel que } f_n(x_0) \text{ converge} \\ - (f_n)' \text{ cvu vers } g \text{ sur } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (f_n) \text{ cvu vers } f \\ f \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b] \\ \text{et } f' = g \end{array}$$

Proposition

* Soient (E,d), (F,δ) espaces métriques et $(f_n)_n : E \to F$

$$\left.\begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } E \\ - \sum_n f_n \text{ cvu sur } E \end{array}\right\} \Rightarrow S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } E$$

* Soit E un espace de Banach (evn complet)

$$\left.\begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est } C^1 : [a,b] \to E \\ - \sum_n f_n \text{ cvs sur } [a,b] \\ - \sum_n f_n' \text{ cvu sur } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est } C^1 \text{ sur } [a,b] \\ \text{et } \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \end{array}$$

Contre-exemple $f_n : t \mapsto \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et cvu vers $f : t \mapsto |t|$ qui n'est pourtant pas C^1

③ Intégrabilité [Br.&P]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Théorème de Beppo-Levi Soit $(f_n)_n$ cvs vers f et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \geq 0$ et croissante $\Rightarrow \lim_{n\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Conséquence : Lemme de Fatou. Soit $(f_n)_n$ fonctions positives $\Rightarrow \int_X \underline{\lim}_n f_n \, d\mu \leq \underline{\lim}_n \int_X f_n \, d\mu$

Exemple : $f_n : x \mapsto \frac{n^2|x|+1}{n|x|^3+1}$ on peut montrer par Fatou que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx$ diverge (car minorée par une fonction divergente)

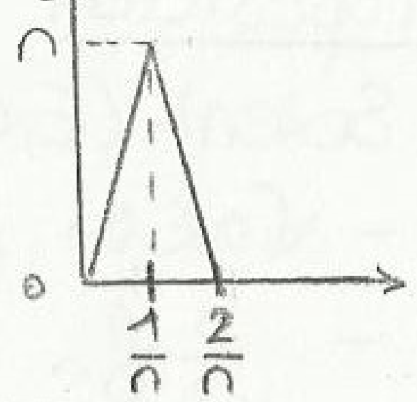
Théorème de convergence dominée Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Si (i) $f_n(x)$ converge μ pp

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$ telle que $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-pp

$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{K})$ telle que : $f_n(x) \to f(x)$ μ pp et $\lim_{n\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Exemple $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$(f_n)_n$ cvs vers $f : x \mapsto 0$ sur $[0,1]$ mais $\lim_{n\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$
[HAU]
$$\neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\infty} f_n(t)\,dt$$

4) Approximation de fonctions

Théorème de Stone-Weierstrass Toute fonction continue $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes. [GOU] p. 225

Théorème Soit f continue $[0,1] \to \mathbb{R}$, on définit le n^e polynôme de Bernstein : $B_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$
$\Rightarrow (B_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. [GOU] p. 230
[TABCL] p 364

II- Séries entières et holomorphie

1) Série entière [ZO] p.40

Définitions
* Une série entière est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$
* On pose $R = \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \{ \sup_n |a_n| r^n < +\infty \}$, R est appelé le rayon de convergence de la série entière et vérifie : $|z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$

Exemple L'exponentielle complexe $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

Proposition Une série entière converge normalement et donc uniformément sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

Contre-exemple En général, il n'y a pas convergence uniforme sur le disque ouvert tout entier : par exemple $\sum_n z^n$ ne converge pas uniformément sur tout son disque ouvert de convergence [Obj-Agr] p.48

2) Lien fonction holomorphe / série entière
[Obj Agr] p.63

Proposition Soit f holomorphe sur un disque ouvert de rayon r_0, centré en z_0. Alors f est développable en série entière dans ce disque : il existe une série $\sum_n a_n (z-z_0)^n$ de rayon de convergence $\geq r_0$ telle que : $\forall z \in D(z_0, r_0)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.
De plus, "contrôler" f permet de contrôler ses dérivées

Explication Les coefficients du développement ne peuvent pas croître trop vite d'après les inégalités de Cauchy : En notant $M(r) = \max_{C(a,r)} |f|$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r)\, n!}{r^n}$

III - Séries de Fourier

① Théorie dans L^2 [Obj Agr] p.122

On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

On note $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall x\in\mathbb{R}, e_n(x) = e^{inx}$; $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ (=base orthonormée totale)

Conséquence $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n$

où $\langle f, e_n\rangle = c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de $f\in L^2(\mathbb{T})$

$\Longrightarrow f = S(f)$ pp où $S(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ = somme de la série de Fourier de $f\in L^2(\mathbb{T})$

Formule de Parseval = cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel : $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Exemple On montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ avec la fonction f continue par morceaux, 2π-périodique $f : x\in[0,2\pi] \mapsto x$

② Théorème de Féjer [GOU] p.282

Théorème Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continue, 2π-périodique ; on note comme précédemment $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ le $k^{ème}$ coefficient de Fourier de f.

On note $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ et $C_n = \frac{S_0 + \dots + S_n}{n+1}$

[On introduit aussi $\tilde{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ et $\tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0 + \dots + \tilde{S}_n}{n+1}$]

Alors la suite de fonctions $(C_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, on appelle cette convergence, la convergence "en moyenne de Césaro".

↳ Développement [GOU] p.282

③ Formule sommatoire de Poisson [ZQ] p.93

Définition Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, on appelle $\hat{f} : x\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2i\pi xy}\,dy$ la transformée de Fourier de f.

Formule sommatoire de Poisson Soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap C^0(\mathbb{R})$ à décroissance rapide i.e. : $\exists M>0, \alpha>1 : \forall x\in\mathbb{R}\ |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

Si $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$

↳ Développement [ZQ] p.93