240 : Transformation de Fourier - Applications.

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I) Transformée de Fourier...

a) ... dans $L^1(\mathbb{R})$

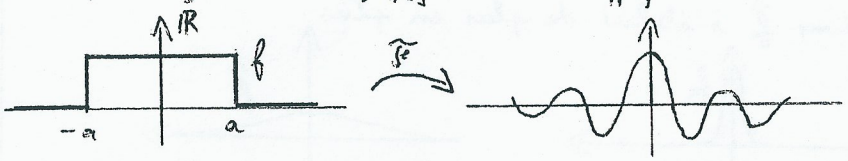
[Can] **Déf 1 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f comme la fonction définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx.$$

On définit de même la transformée inverse $\overline{\mathcal{F}}$ en remplaçant $e^{-2i\pi\xi x}$ par $e^{2i\pi\xi x}$.

Ex 2 : Soit $a>0$ et $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$.

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int e^{-2i\pi\xi x}\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\,dx = \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}$$



[Gas] **Th 3 (Riemann-Lebesgue) :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

i) $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire et continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

iii) $\lim_{|\xi|\to+\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$

Prop 4 (Dérivation) : (i) Si $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\hat{f}$ est n fois dérivable et on a $\hat{f}^{(k)}(\xi) = \widehat{(-2i\pi x)^k f(x)}$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et si $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \hat{f}(\xi)$.

iii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support borné, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Déf 5 : → La symétrisée f_σ de f est la fonction définie par $f_\sigma(x) = f(-x)$.
→ La translatée $\tau_a f$ est la fonction définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$

Prop 6 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ i) $\overline{\mathcal{F}(f)} = \overline{\mathcal{F}}(\overline{f})$ ii) $(\mathcal{F}(f))_\sigma = \overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}(f_\sigma)$

iii) f paire $\Rightarrow \hat{f}$ paire iv) f réelle paire $\Rightarrow \hat{f}$ réelle paire

(NB : iii) et iv) sont aussi valables pour f impaire)

Prop 7 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$. i) $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}\hat{f}(\xi)$

ii) $\tau_a \hat{f}(\xi) = \widehat{e^{2i\pi a\xi} f(x)}$.

Ex 8 : $f(x) = e^{-ax}\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)$ avec $\mathrm{Re}(a)>0$. $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{a+2i\pi\xi}$.

Ex 9 : (Gaussiennes) $f_a(x) = e^{-ax^2}$. $\hat{f_a}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2\xi^2/a}$.

Prop (Formule sommation de Poisson) :

$F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que : i) $\exists \alpha>1$ $\exists M>0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq \dfrac{M}{(1+|x|)^\alpha}$

ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{F}(n)| < \infty$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{F}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n)$.

Application : $\Theta :]0;+\infty[\to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi x n^2}$, vérifie $\Theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) Inversion de la transformation de Fourier [Can]

Prop 10 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$ dans $L^1(\mathbb{R})$

NB : La transformée de Fourier est donc injective.
En revanche, elle n'est pas surjective.

Th 11 (inversion de Fourier) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

On a alors $\boxed{f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \ \text{p.p}}$.

Ex 12 : Soit $a>0$ et f_a la fonction définie par $f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}$.

Th 11 $\Rightarrow$ $f_a(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x}\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}\, d\xi \Rightarrow \underline{\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \pi e^{-2\pi a|\xi|}}$

c) ... dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Déf 13 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \forall k,p \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \partial^p g(x)| < +\infty \right\}$

Prop 14 : i) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable pour la multiplication par un polynôme.
ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation.
iii) $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$.

NB : Le Th 11 reste valable avec comme seul hypothèse $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Prop 15 : L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Prop (Plancherel-Parseval) : Soient $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$.

d) Transformation de Fourier et convolution

Déf 16 : Pour deux fonctions f et g, on appelle convolution de f et g (noté $f*g$) la fonction définie par :

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\, du.$$

Th 17 : Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\underline{\mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f).(\mathcal{F}g)}$

Th 18 : Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que fg, $\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}g \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\mathcal{F}(fg) = (\mathcal{F}f)*(\mathcal{F}g)$

e) ... dans $L^2(\mathbb{R})$

Prop 19 : $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Le théorème du prolongement des applications linéaires continues sur une partie dense permet d'établir le théorème suivant.

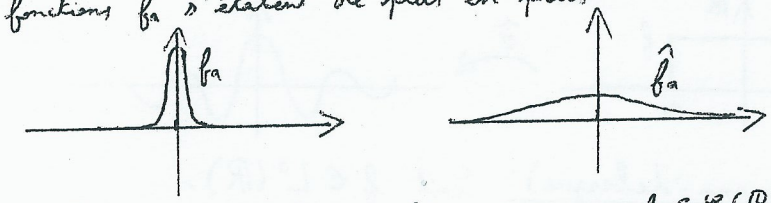
Th 20 : La transformation de Fourier se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Th (Plancherel) : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

II) Propriétés de localisation et de support [Can]

a) Inégalité de Heisenberg

Pour des gaussiennes (cf Ex 9), si $a \to +\infty$, les fonctions f_a sont de plus en plus concentrées à l'origine alors que les fonctions $\hat{f}_a$ s'étalent de plus en plus.



On cherche à quantifier ce phénomène pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On pose $x_0 = \int_{\mathbb{R}} x|f|^2 dx$ et $V(f) = \int_{\mathbb{R}} (x-x_0)^2 |f|^2 dx = \|(x-x_0)f\|_2^2$

De même $\xi_0 = \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{f}|^2 d\xi$ et $V(\mathcal{F}f) = \int_{\mathbb{R}} (\xi-\xi_0)^2 |\mathcal{F}f|^2 d\xi$.

Inégalité de Heisenberg : $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\boxed{V(f)\,V(\mathcal{F}f) \geq \frac{1}{16\pi^2}}$.

$\hookrightarrow$ Les gaussiennes sont les seules fonctions à réaliser l'égalité.

[Can]

b) Théorème de Paley-Wiener

On souhaite prolonger analytiquement la transformée de Fourier dans le plan complexe.

Prop 21 : Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier se prolonge en tout $z \in \mathbb{C}$ par $\mathcal{F}(f)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi z x} f(x)\,dx$.

Th (Paley-Wiener) : Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit nulle en dehors de $[-M, M]$, il est nécessaire et suffisant que $\mathcal{F}(f)$ se prolonge en une fonction analytique dans tout $\mathbb{C}$ telle que : $\forall k \geq 0$, $\exists C_k > 0$ avec

$$|\mathcal{F}(f)(z)| \leq C_k \frac{1}{|z|^k} e^{2\pi M |\mathrm{Im}(z)|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

[Can]

III) Application à l'équation de la chaleur

On considère l'EDP : $\partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$.

avec comme condition initiale $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où f est C^2 et bornée.

NB : On raisonne formellement.

→ On note v la transformée de Fourier de $x \to u(x,t)$

→ On réécrit u à l'aide le formule d'inversion.

→ On réinjecte u dans l'EDP.

→ Par injectivité de la transformée inverse (Prop 10), on obtient une EDO pour v.

→ On obtient une expression de v en résolvant cette EDO.

→ Par la transformée inverse, on obtient pour u :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\,dy} \quad \forall t > 0$$

→ Il reste alors à vérifier que cette expression est bien solution du problème initial.

IV) Extension aux distributions tempérées.

[Can]
[Zui]

Déf 22 : On appelle $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum C_{p,k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \partial^k \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

la sommation portant sur un ensemble fini de couples (p,k).

Ex : $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Déf 23 : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$.

Ex : $\langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle$.

D'où $\mathcal{F}\delta_0 = 1$.

Références :

[Can] : Candelpergher : Calcul intégral

[Zui] : Zuily : Distributions et équations aux dérivées partielles

[Gas] : Gasquet, Witomsky : Analyse de Fourier et applications

Plan

[