239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $C = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. On considère $f : X \times C \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in C$ $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable.

On étudie $F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$.

I. Régularité et premiers exemples [ZQ]

__Théorème__ : Continuité

On suppose les conditions suivantes vérifiées

i) $\forall t \in C$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable

ii) Pour presque tout $x \in X$. $t \mapsto f(x,t)$ est continue

iii) Pour tout compact $K \subset C$, il existe $g_K \in L^1$ positive telle que $\forall t \in K$ $|f(x,t)| \leq g_K(x)$ pour presque tout $x \in X$.

Alors F est continue

__exemples__

- $t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

[H] - Pour $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto te^{-xt} \end{array}$ $F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

Hauchecorne

__Théorème__ : dérivabilité

On suppose que C est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

i) $\forall t \in C$, $x \mapsto f(x,t) \in L^1$

ii) $\exists N \subset X$, $\mu(N) = 0$ tel que $\forall x \notin N$ $t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^k(C)$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| \leq k$ et tout compact K de C, il existe $g_{\alpha,K} \in L^1$ positive, indépendante de t telles que

$|D^\alpha f(x,t)| \leq g_{\alpha,K}(x)$ $\forall t \in C$, $\forall x \notin N$

Alors

i) $\forall t \in C$, $|\alpha| \leq k$ $x \mapsto D^\alpha f(x,t) \in L^1$

ii) $F \in \mathcal{C}^k(C)$ et $D^\alpha F(t) = \int D^\alpha f(x,t)\, d\mu(x)$

__exemples__

i) $t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

ii) $\Gamma : t \mapsto \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

[H] iii) Pour $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto t^2 e^{-x|t|} \end{array}$ est $\mathcal{C}^1$ mais F n'est pas dérivable en 0

__Application__

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

__Théorème__ : holomorphie

Soit ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \omega \to \mathbb{C}$. On suppose

i) $\forall z \in \omega$, $x \mapsto f(x,z) \in L^1$

ii) $\exists N \subset X$, $\mu(N) = 0$, $\forall x \notin N$ $z \mapsto f(x,z) \in H(\omega)$

iii) Pour tout compact K de ω, il existe g L^1 positive telle que $|f(x,z)| \leq g(x)$ $\forall z \in K$, $\forall x \notin N$

Alors $F : z \mapsto \int_X f(x,z)\, d\mu(x)$ est holomorphe et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x,z)\, d\mu$

__exemple__

$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur $\{z,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$

II. Régularisation et convolution [B] Brézis

Dans cette partie $X = C = \mathbb{R}^N$

__définition__ : suite régularisante

$(\rho_n)_{n \geq 1}$ est une suite régularisante si :

$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}\, \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n})$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$ et $\rho_n \geq 0$

__exemple__

$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}\right) & \text{si } \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\rho \in C_c^\infty$, $\mathrm{supp}\, \rho = B(0,1)$ $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho > 0$

Ainsi $(\rho_n) = \left(\frac{1}{\int \rho} n^N \rho(xn)\right)$ est une suite régularisante.

__Théorème - définition__ : Convolution

Soit $f \in L^1$, $g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1$. Posant $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy$

Alors $(f * g) \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

proposition
Si $f \in \mathcal{E}_c^k$, $g \in L^1_{loc}$ Alors $f * g \in \mathcal{E}^k$
et $D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g$

proposition
Soit $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, alors $\rho_n * f \xrightarrow{\|.\|_p} f$

Application
$\mathcal{E}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Critère de compacité forte dans L^p

theorème
Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$. $\mathcal{F}$ partie bornée de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.
On suppose i) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \omega \subset\subset \Omega$, $\exists \delta > 0$, $\delta < dist(\omega, \complement\Omega)$
tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$, $|h| < \delta$ et $\forall f \in \mathcal{F}$.
ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \omega \subset\subset \Omega$ tel que $\|f\|_{L^p} < \varepsilon$ $\forall f \in \mathcal{F}$
Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Application
$p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ où $q \in [1, p^*[$ $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
ouvert borné à bord C^1
avec injection compacte.

III) Transformée de Fourier [Z] Zuily (distributions)

1) Dans $\mathcal{S}$

definition
Pour $u \in \mathcal{S}$, on definit la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}u$
par $\hat{u}(\hat{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-i \langle x, \hat{x} \rangle) dx$

Remarque
$\hat{u}$ est bien définie car $x \mapsto u(x)\exp(-i\langle x, \hat{x}\rangle) \in \mathcal{S} \subset L^1$

exemple
Pour $u(x) = e^{-z\|x\|_2^2}$ où $Re\, z > 0$, $\hat{u}(\hat{x}) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^n \exp\left(-\frac{\|\hat{x}\|^2}{4z}\right)$

theorème
i) La transformée de Fourier est une application linéaire.
[DEV] ii) $\mathcal{S}$ est stable par transformation de Fourier, plus precisement :
$\widehat{\partial_j u} = i x_j \hat{u}$ et $\partial_j \hat{u} = \widehat{-i x_j u}$

iii) Elle est même bijective bicontinue de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, d'inverse
$\mathcal{F}^{-1}$. $\mathcal{F}^{-1} v(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int e^{i\langle x, \hat{x}\rangle} v(\hat{x}) d\hat{x}$

Application resolution d'equations aux dérivées partielles
Soit $f \in \mathcal{S}$. il existe une unique fonction
telle que $\begin{cases} \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(x, t=0) = f(x) \end{cases}$

2) Application aux probabilités.

definition
Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On définit sa transformée de Fourier par : $\hat{\mu}(\hat{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{+i\langle x, \hat{x}\rangle} d\mu(x)$

definition fonction caractéristique
Soit X vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$
On appelle fonction caractéristique X, la transformée de Fourier de P_X
$\varphi_X(t) = E(e^{i\langle t, X\rangle})$

proposition
Soit X, Y deux vecteurs aleatoires.
Si $\varphi_X = \varphi_Y$ Alors $P_X = P_Y$

Application à l'independance
Pour X, Y deux vecteurs aleatoires independants, on a $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$

theorème des moments
Si φ_X est analytique alors X est caractérisé par ses moments.

definition - theorème : convergence en loi
Soit $(X_n), X$ des vecteurs aléatoires. il y a equivalence entre i) et ii)
i) P_{X_n} converge étroitement vers P_X. On dit que X_n converge en loi vers X.
ii) $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^N$

Application : theorème limite central
(X_n) iid, $E X_n^2 < \infty$. Posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
Alors $\frac{S_n - nEX}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Var X)$

IV. La transformée de Laplace [F] Feller

definition

Soit μ une mesure concentrée sur $[0,+\infty[$. La transformée de Laplace de μ est $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, d\mu(x)$

proposition

Si $\varphi(a) < \infty$ pour $a \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(\lambda) < \infty$ pour $\lambda \in [a,+\infty[$

exemple

Pour $d\mu(x) = \dfrac{x^{\rho}\,dx}{\Gamma(\rho+1)}$, $\rho > 0$ sa transformée de Laplace est $\varphi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^{\rho}}$

Theoreme - continuité

Soit (μ_n) suite de mesures concentrées sur $[0,+\infty[$ de transformée de Laplace φ_n definie sur $[a,+\infty[$

- Si $\varphi_n(\lambda) \longrightarrow \varphi(\lambda)$ pour $\lambda > a$, alors φ est la transformée de Laplace d'une mesure μ et $\mu_n \longrightarrow \mu$.
- Si $\mu_n \to \mu$ et $(\varphi_n(a))_n$ est bornée alors $\varphi_n(\lambda) \to \varphi(\lambda)$, $\lambda > a$

proposition

Soit μ, ν deux mesures, de transformée de Laplace φ et γ.

(i) La transformée de Laplace de $\mu * \nu$ est $\varphi.\gamma$.

(ii) Soit $[a,+\infty[$ le domaine où $\varphi(\lambda) < \infty$, alors φ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]a,+\infty[$ et $\forall \lambda \in]a,+\infty[$ $\varphi^{(n)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda x} x^n \, d\mu(x)$

(iii) Soit $a > 0$, $\lambda \mapsto \varphi(a\lambda)$ est la transformée de Laplace de $d\mu\left(\frac{x}{a}\right)$.

definition

Une fonction φ est complètement monotone, definie sur $\mathbb{R}_+^*$, si elle est $\mathcal{C}^{\infty}$ et $(-1)^n \varphi^{(n)}(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda > 0$

Theoreme

Une fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ est complètement monotone ssi elle est de la forme $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, d\mu(x)$ où μ est une mesure concentrée

Application : formule d'inversion

Aux points de continuité de $x \mapsto F(x) = \mu(\{u \leq x\})$, on a :

$$F(x) = \lim_{a \to \infty} \sum_{n \leq ax} \frac{(-a)^n}{n!} \varphi^{(n)}(a)$$

Une mesure est alors caractérisée par sa transformée de Laplace.

Application : theoremes tauberiens [DEV 2]

Theoreme 1

Soit μ une mesure, de transformée de Laplace φ définie pour $\lambda > 0$. Soit $\rho \geq 0$ et $t\tau = 1$.

i) $\dfrac{\varphi(\tau\lambda)}{\varphi(\tau)} \xrightarrow[\tau \to 0]{} \dfrac{1}{\lambda^{\rho}}$ ii) $\dfrac{\mu(0, u(tx))}{\mu(0, u(t))} = \dfrac{F(tx)}{F(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} x^{\rho}$

iii) $\varphi(\tau) \sim \Gamma(\rho+1) F(t)$

Alors i) $\Rightarrow$ ii) et iii) et ii) $\Rightarrow$ i) et iii)

theoreme

Soit (q_n) suite positive. On suppose que $Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n$ converge pour $0 < s < 1$, L telle que $\frac{L(tx)}{L(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$ (L varie lentement à l'infini) et $0 \leq \rho < \infty$. Alors on a l'equivalence : i) $\Leftrightarrow$ ii)

i) $Q(s) \underset{s \to 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-s)^{\rho}} L\left(\dfrac{1}{1-s}\right)$

ii) $\sum_{k=1}^{n} q_k \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n)$

Si de plus (q_n) est monotone et $0 < \rho < \infty$ alors ces propriétés sont equivalents à :

$$q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n)$$

V Etude Asymptotique

On étudit $F(t) = \int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x)\,dx$

theoreme

Soit $I =]a,b[$ borné ou non. $\varphi \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$

On suppose

i) $\int e^{t\varphi(x)} |f(x)|\,dx < \infty$ $\forall t$

ii) φ' s'annule en 1 seul point $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$

iii) $f(x_0) \neq 0$

Alors $F(t) \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{|\varphi''(x_0)|}} \, e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) \, t^{-1/2}$, $t \to \infty$

Application : formule de Stirling :

$$\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi} \, t^{t+1/2} e^{-t}$$

(+) Pb de Dirichlet [Rudin]

(+) Méthode de la phase stationnaire. [DVP] [ZQ]