238 : Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle.

I) Calcul approché d'intégrales

<u>But</u> : On souhaite approcher la valeur $\int_a^b f(x)dx$, où f est intégrable sur $[a,b]$, où $a,b \in \mathbb{R}$.

a) Méthode de quadrature

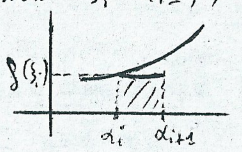
On suppose f continue sur $[a,b]$, et soit $(\alpha_i)_{i\in\{0,\dots,k\}}$ une subdivision telle que $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \dots < b = \alpha_k$.

<u>Déf</u> : On appelle méthode de quadrature élémentaire la donnée de $l \in \mathbb{N}$, $(\omega_{i,j})_{j\in\{0,\dots,l_i\}}$ et $(\xi_{i,j})_{j\in\{0,\dots,l_i\}}$ tels que
$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \simeq (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j}\, f(\xi_{i,j}),$$
avec $\xi_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} = 1$.

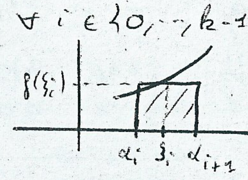
<u>RM</u> : On a $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{l_i} (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,\omega_{i,j}\, f(\xi_{i,j})$.

C'est une méthode de quadrature composée.

<u>Exemples</u>
- Si $l_i = 0$ et $\xi_i = \alpha_i$ (respectivement $\xi_i = \alpha_{i+1}$), $\forall i \in \{0,\dots,k-1\}$, on obtient la méthode des rectangles à gauche (respectivement à droite)



- Si $l_i = 0$ et $\xi_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$, $\forall i \in \{0,\dots,k-1\}$, on obtient la méthode du point du milieu.



<u>Déf</u> : On dit qu'une méthode de quadrature (élémentaire ou composée) est d'ordre N si elle est exacte pour tout polynôme de degrés N, et inexacte pour au moins un polynôme de degrés $N+1$.

<u>Exemples</u> :
Les méthodes de l'exemple précédent sont respectivement d'ordre 0 (pour les rectangles à gauche et à droite) et 1.

<u>Thm</u> : On suppose que l'on a une méthode de quadrature composée avec $l_i = l \in \mathbb{N}$ $\forall i \in \{0,\dots,k-1\}$, et $\omega_{i,j} = \omega_j$ (ils ne dépendent ni de i ni de k)
Alors $\sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \sum_{j=0}^{l} \omega_j\, f(\xi_{i,j})$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ quand $k \to +\infty$ et $\max_i (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \to 0$.

b) Erreur et méthode de Gauss.

On va s'intéresser au calcul de $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$, où w est une fonction positive, continue et intégrable sur $[a,b]$.

<u>Déf</u> : On considère une méthode de quadrature telle que $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f(x_j)$, $x_j \in [a,b]$

L'erreur due à cette méthode est donnée par
$$E(f) = \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,w(x)\,dx - \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f(x_j) \right|$$

<u>Thm</u> : (Gauss) [DEV 1]
Il existe une unique méthode d'intégration numérique de la forme $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$ d'ordre $2n-1$, où les $(x_i)_i$ sont les racines du $n^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal pour le poids w.

<u>exemple</u> :
Sur $[-1,1]$, avec $w \equiv 1$ et $l = 0$, le polynôme associé est $P(X) = X$, d'où
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 2f(0)$ est bien une méthode d'ordre 1.

c) Approche probabiliste

<u>Thm</u> (loi forte des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) et intégrables.
Alors $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_0)$

RM : Si on prend $X_i \sim \mathcal{U}(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, alors si f est intégrable sur $]a,b[$, $(f(X_i))_{i\geq 0}$ sera i.i.d et intégrable. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{ps} \int_a^b f(x)\,dx.$$

exemple : On peut approcher la valeur de π en utilisant ce procédé avec $a=0$, $b=1$ et $f(x)=4\sqrt{1-x^2}$

II / Calcul approché d'une solution d'une équation différentielle.

On souhaite résoudre numériquement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (E) \quad \text{sur } [t_0, t_0+T[,\ T\in\mathbb{R}^*_+.$$

On suppose f suffisament regulière.

Soit $(t_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ une subdivision de $[t_0, t_0+T[$, telle que $t_0<t_1<\dots<t_N=t_0+T$.

On note $h_n = t_{n+1}-t_n$ et $h_{max} = \max_n h_n$.

a) Méthodes à un pas

Déf : On appelle méthode à un pas les méthodes qui peuvent s'écrire

$$y_{n+1} = y_n + h_n\,\Phi(t_n, y_n, h_n),\quad n\geq 0$$

avec Φ continue sur $[t_0, t_0+T[\times\mathbb{R}\times[0,r]$, $r\in\mathbb{R}^{+*}$, et Φ ne dépend que de f.

Déf : L'erreur de consistance $(e_n)_n$ d'une méthode est donnée par :

pour toute solution z exacte de (E) :

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n\,\Phi(t_n, z(t_n), h_n)$$

Déf : On dit qu'une méthode est consistante si, pour toute solution exacte, $\sum_{0\leq n\leq N} |e_n|$ tend vers 0 lorsque h_{max} tend vers 0.

Thm : La méthode est consistante si et seulement si

$$\forall (t,y)\in[t_0,t_0+T[\times\mathbb{R},\quad \Phi(t,y,0) = f(t,y)$$

Déf : On dit qu'une méthode est stable s'il existe $S\geq 0$ tel que $\forall\,(y_n)_{n\geq 0}$, $(\tilde{y}_n)_{n\geq 0}$, definies par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n\,\Phi(t_n, y_n, h_n)$$
$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n\,\Phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n$$

on ait

$$\max_n |\tilde{y}_n - y_n| \leq S_0\left(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_n |\varepsilon_n|\right)$$

Déf : On dit qu'une méthode est convergente si pour toute solution exacte z, la suite $(y_n)_n$ vérifie

$$\max_n |y_n - z(t_n)| \to 0 \quad \text{lorsque} \begin{cases} y_0 \to z(t_0) \\ h_{max} \to 0 \end{cases}$$

Thm : Si la méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.

Déf : On dit qu'une méthode est d'ordre $\geq p$ si pour toute solution exacte z, $\exists C>0$ tel que

$$|e_n| \leq C h_n^{p+1},\quad \forall n\in\{0,\dots,N\}.$$

Elle est d'ordre p si elle est d'ordre $\geq p$ et qu'elle n'est pas d'ordre $\geq p+1$.

Lemme : (critère de l'ordre)

La méthode est d'ordre $\geq p$ si et seulement si Φ est telle que

$$\frac{\partial^\ell \Phi}{\partial h^\ell}(t,y,0) = \frac{1}{\ell+1} f^{[\ell]}(t,y),\quad 0\leq \ell\leq p-1.$$

avec $f^{[\ell]}(t,y) = \left(f^{[k-1]}\right)'_t(t,y) + \left(f^{[k-1]}\right)'_y(t,y)\cdot f(t,y)$

b) Construction de la méthode de Runge-Kutta

Etape 1 : On prend q réels c_i dans $[0,1]$, et on définit $t_{n,i} = t_n + c_i h_n$, $\forall n \in \{1,\dots,k-1\}$, $\forall i \in \{1,\dots,q\}$

Etape 2 : Soit z une solution exacte de (E).

$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(s, z(s))\,ds$$

soit en posant $s = t_n + u h_n$

$$z(t_{n,i}) = z(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n))\,du.$$

Etape 3 : Pour tout i, on choisit une méthode d'intégration sur $[0, c_i]$ telle que :

$$\int_0^{c_i} g(t)\,dt \simeq \sum_{1 \le j < i} a_{ij}\, g(c_j)$$

et une méthode sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 g(t)\,dt \simeq \sum_{1 \le j \le q} b_j\, g(c_j)$$

Etape 4 : On applique ces méthodes aux égalités de l'étape 2 :

$$\begin{cases} z(t_{n,i}) = z(t_n) + h_n \sum_{1 \le j < i} a_{ij}\, f(t_{n,j}, z(t_{n,j})) \\ z(t_{n+1}) = z(t_n) + h_n \sum_{1 \le j \le q} b_j\, f(t_{n,j}, z(t_{n,j})) \end{cases}$$

La méthode de Runge Kutta est donc déterminée par les $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j < i}}$ $(c_i)_{1 \le i \le q}$ et $(b_i)_{1 \le i \le q}$

On la représente sous forme de tableau :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & 0 & & \\ | & a_{21} & \ddots & 0 \\ c_q & | & \text{---} & a_{q\,q-1}\ \ 0 \\ \hline & b_1 & \text{---} & b_q \end{array}$$

Exemple : pour $q = 1$

$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$, soit $\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \end{cases}$

c'est Euler explicite. ← donner un ex non trivial (RK4)

c) Exemples

Il est possible d'utiliser des méthodes dites implicites comme Euler explicite :?

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Appliquons les deux méthodes d'Euler à deux exemples.

1) $\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Par explicite : $y_n = (1 - h\lambda)^n y_0$

Par Implicite : $y_n = \dfrac{y_0}{(1+\lambda h)^n}$

dans ce cas la méthode implicite est plus stable

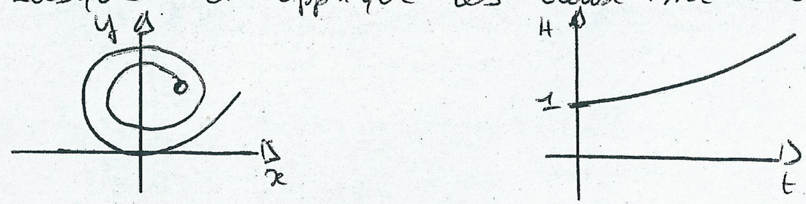
2) Systèmes hamiltoniens

$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

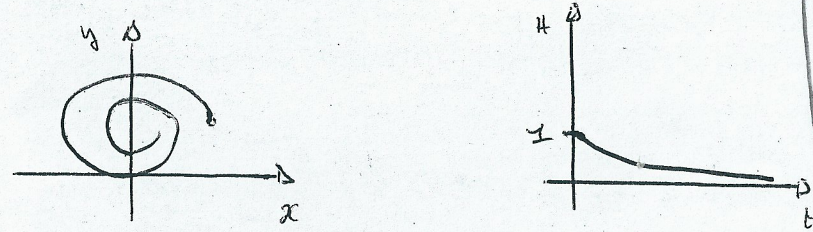
La solution est $(\cos t, \sin t)$

l'hamiltonien du système est $H(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Lorsque l'on applique les deux méthodes, on a :



Euler explicite



Euler implicite

Ref
- Demailly
- Crouzeix - Mignot
- Gourdon

(+) Si on aime ce genre de trucs, on peut parler d'Euler Maclaurin de méthode multi-pas ... les ED, d'Adams-Bashforth...