235 : SUITES ET SERIES DE FONCTIONS INTEGRABLES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Cadre : sauf mention contraire, on se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) DEFINITIONS ET THEOREMES GENERAUX

1.1. Introduction de l'intégrale de Lebesgue [BR-P]

Notation : $\mathcal{I}([a,b];\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$

Thm : soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{I}([a,b],\mathbb{K})$. Si f_n converge uniformément vers f, alors $f \in \mathcal{I}([a,b],\mathbb{K})$ et

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n \, d\mu$$

Déf (fonction réglée) : une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est réglée s'il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

NB : Toute fonction réglée est Riemann-intégrable

Le théorème précédent est faux sans l'hypothèse de CVU.

Contre-ex : Soient $(r_n)_{n\geq 1}$ une numérotation des rationnels de $[0,1]$ et $f_n(x) := \mathbb{1}_{\{r_1,\dots,r_n\}}(x)$, $n \geq 1$.

Les f_n sont Riemann-intégrables mais $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ne l'est pas.

But : on souhaite avoir un théorème analogue au précédent sans l'hypothèse de CVU : c'est pour cette raison qu'on introduit l'intégrale de Lebesgue.

Déf : soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on définit l'intégrale de Lebesgue de f par :

$$\int_\Omega f \, d\mu := \sup_{\substack{s \text{ étagée} \\ s \leq f}} \int_\Omega s \, d\mu$$

f est dite Lebesgue intégrable si $\int_\Omega |f| \, d\mu$ est finie

1.2. Quelques rappels de théorie de la mesure [BR-P]

Thm de Beppo Levi : Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable et

$$\boxed{\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu}$$

Ex : comportement asymptotique de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^3+nk+2}$.

Lemme de Fatou : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables positives, alors :

$$\boxed{0 \leq \int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu}$$

Déf (convergence μ-presque partout) : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables et f une fonction mesurable. On dit que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-p.p}} f$ si $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\forall x \in \Omega \setminus N$ où $\mu(N) = 0$

→ application du lemme de Fatou : soit $(f_n)_n \in L^1$ (i.e $\int_\Omega |f_n| d\mu < +\infty$ $\forall n$) tq $f_n \xrightarrow{\mu\text{-p.p}} f$, $f \in L^1$ et $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_1$

Alors $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

1.3. Résultats de théorie de l'intégration [BR-P p134-13…]

On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{f : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $\int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty\}$ $\forall p \in [1,+\infty[$

$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{f \mid f$ μ-essentiellement bornée$\}$

Thm de convergence dominée : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables vérifiant :

(i) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-p.p}} f$ où f est une fonction mesurable

(ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ telle que $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-p.p

Alors
- $(f_n)_{n\geq 0} \in (\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu))^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.
- $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu = 0$. En particulier : $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$

Contre-ex : on peut très bien avoir convergence sans que l'hypothèse de domination soit vérifiée. Ainsi sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on considère une fonction continue positive, intégrable, nulle en dehors de l'intervalle $[0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{f(x+n)}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

On montre que $\int_\mathbb{R} f_n \, d\lambda = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Thm de convergence dominée appliqué aux séries de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$. Alors

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable.
- $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ est bien défini μ-p.p et intégrable.
- $\int_\Omega \sum_{n\geq 1} f_n \, d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_\Omega f_n \, d\mu$

→ applicat° : ① Thms de continuité et de dérivabilité d'intégrales dépendant d'un paramètre
② Thm d'holomorphie sous le signe intégral [ZQ p. 309]

II) REGULARISATION

Motivation : Rendre des fonctions régulières ou approcher une fonction par une suite de fonctions régulières.

$L^p = \mathcal{L}^p_{/\sim}$ où $\sim$ désigne l'égalité presque partout

Prop. : L^p est un espace vectoriel normé pour $\|\cdot\|_p : f \mapsto \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

NB : $\|f\|_\infty = \text{supess}(f)$

Inégalité d'Hölder : Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ mesurables et $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

2.1. Produit de convolution et identités approchées.

Déf : on définit à partir de f et g, sous réserve d'existence, le produit de convolution sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\boxed{f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy}$$

NB : si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est bien défini

Déf : on dit qu'une suite $(f_n)_n$ est une identité approchée si :

i) $f_n(t) \geq 0$ pour presque tout t.

ii) $\forall n, \int f_n(t) dt = 1$

iii) $\text{Supp } f_n \subset B(0, \frac{1}{n})$

iv) $f_n \in C^\infty_c(\mathbb{R})$

Thm : soit $(f_n)_n$ une identité approchée

i) Si $g \in C(\mathbb{R}^n)$, alors $f_n * g \to g$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

ii) Si $g \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, alors $\|f_n * g - g\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

→ applicat° : $C^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense [dans L^p_c (où l'indice "c" dési. les fonctions continues à support compact), donc] dans L^p $\forall p \in [1, +\infty[$

2.2. Etude des espaces L^p ($p \in [1, +\infty[$)

Thm de Riesz-Fischer : $1 \leq p \leq \infty$

i) $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

ii) Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$ (i.e $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), alors il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ telles que $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-pp et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$

contre-ex : exemple de convergence L^p non μ-pp

$([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}, f_{2^n + k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$

$\Rightarrow (f_n)_n$ cv dans L^p vers 0 mais pas presque partout.

Thm de Riesz-Fréchet-Kolmogorov : soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
soit $\omega \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta < \text{dist}(\omega, \Omega^c)$ tel que

$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < \delta$ et $\forall f \in \mathcal{F}$ (où $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$)

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$ [DVPT]

2.3. Application aux séries de Fourier

cadre : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et $\mu = \frac{\lambda}{2\pi}$

Déf : Soit $f \in L^p(\mathbb{T})$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

- $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$ $\forall N \in \mathbb{N}$
- $\forall N \in \mathbb{N}$, $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ (noyau de Dirichlet d'ordre N)
- $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k$ (noyau de Féjer d'ordre N)

Prop : Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors :

i) $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = f * D_N$

ii) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$; alors $\sigma_N(f) = f * F_N$

Thm de Féjer :

i) si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est continue, alors $\sigma_N(f)$ cvu vers f

ii) Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \in L^p(\mathbb{T})$ ($p \in [1, +\infty[$), alors $\sigma_N(f) \xrightarrow{L^p} f$

→ application : les polynômes trigonométriques sont denses dans L^p

III) UTILISATION EN PROBABILITÉS

Contexte : Dans toute la suite, on se place sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

3.1. Les différents types de convergence [COT p.148]

Soient $(X_n)_n$ une suite de variables (v.a) et X également une v.a.

Déf : on dit que $(X_n)_n$ converge presque-sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s} X$ (ssi) $\mathbb{P}(\{\omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\}) = 1$

- on dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ (ssi) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
- Soient X_n et X des v.a de loi de probabilité $\mathbb{P}_{X_n} = Q_n$ et $\mathbb{P}_X = Q$. on dit que X_n converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (ssi) $\int f dQ_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f dQ$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

• La famille de v.a $(X_n)_n$ est équi-intégrable si :

$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{(|X_n| > a)} |X_n| \, dP = 0$$

Le schéma ci-dessous donne le lien entre ces $\neq$ convergences :

$$\begin{tikzcd}
 & L^q \arrow[d, Rightarrow, "q \geq p \geq 1"] & \\
 & L^p \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ddl, dashed, "\text{il existe une sous-suite cv-p.s}"'] & \\
 & L^1 \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{p.s.} \arrow[r, Rightarrow] & \text{proba} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, dashed, bend left, "\text{il existe une sous-suite cv-p.s}"] \arrow[u, dashed, bend right, "\text{si } (X_n)_n \text{ équi-intégrable}"'] & \text{loi} \arrow[l, dashed, bend left, "\text{si lim en loi de } X_n \text{ est constante}"]
\end{tikzcd}$$

3.2. Théorèmes limites [Indispensable]

Thm (Loi Forte des Grands Nombres) : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a intégrables indépendantes et identiquement distribuées. Alors :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1]$$

→ applications : ① Approximation uniforme d'une fonction continue par des polynômes de Bernstein.
② Méthode de Monte-Carlo.

Thm central limite : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a i.i.d de carré intégrable, de moyenne m et de variance σ^2. Alors :

$$\frac{(X_1 + \dots + X_n - nm)}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

[OUVT]

3.3. Martingales [Dispensable, à faire si on est familier]

Def : Soit $(X_n)_n$ un processus stochastique à valeurs réelles et $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. On dit que $(X_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-(sur, sous)-martingale si :

i) $\forall n$, X_n est intégrable

ii) $(X_n)_n$ est $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté

iii) $\forall n$, $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \ (\leq ; \geq) = X_n$ p.s.

Def (temps d'arrêt) : Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration. Une v.a T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un $(\mathcal{F}_n)$-temps d'arrêt (t.a) si :
$\forall n$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ ou bien, de façon équivalente, si $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Def : Soit $(X_n)_n$ un processus $(\mathcal{F}_n)_n$-adapté et T un $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a. On appelle processus arrêté à l'instant T le processus $X_T = (X_n^T)_n$ défini pour chaque n par $X_n^T = X_{n \wedge T}$

1er thm d'arrêt : Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$ sous-martingale et S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a bornés tq $S \leq T$. Alors $X_S, X_T \in L^1$ et de plus, $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_S$ p.s.

2ème thm d'arrêt : Soit $(X_n)_n$ une $(\mathcal{F}_n)_n$ ss-martingale et S, T deux $(\mathcal{F}_n)_n$-t.a (finis ou non) tq $S \leq T$ p.s. Si $(X_{n \wedge T})_n$ est équi-intégrable alors $X_S, X_T \in L^1$ et $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_S$ p.s

Processus de Galton-Watson : Soient $(\xi_i^n)_{i, n \geq 0}$ des v.a i.i.d, intégrables de moyenne m, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $Z_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{n+1}$$

où Z_n = nombre d'individus à la $n^{\text{ème}}$ génération
$\forall 1 \leq i \leq Z_n$, ξ_i^n correspond au nombre de descendants du $i^{\text{ème}}$ individu de la $n^{\text{ème}}$ génération

Le processus $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)_n$ est une martingale

- Si $m < 1$, la population va s'éteindre presque sûrement
- Si $m = 1$, " " "
- Si $m > 1$, on n'a pas d'extinction.

Références :
- Brézis
- Briane-Pagès
- Cottrell
- Ouvrard 2

Ajouts possibles : · semi-intégrabilité
· Radmacher (dvp) → preuve analytique (TCD) ou → preuve ac martingale (si on aime ça)