① 234 Espace L^p $1 \le p \le +\infty$

Cadre : On se place dans un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Structure topologique :

① L'espace $\mathcal{L}^p$:

Briane Pagès p151

Déf : $\forall p > 0$, on définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurables $/ \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$. On note $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu$

- Si $\mu \neq 0$, on définit $\operatorname{supess}(f) = \inf\{ M > 0 / \mu(\{|f| > M\}) = 0 \} \geq 0$ (avec $\inf \emptyset = +\infty$).

B.P p169

On note $\|f\|_\infty = \operatorname{supess}(f)$. $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K} / \|f\|_\infty < +\infty \}$.

Ex : • Si on prend μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$ alors on a :

B.P p151

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m) = \ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \{ (a_m)_m \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum_{m \geq 0} |a_m|^p < +\infty \}$

Prop : • Inégalité de Minkowski : $\forall p \in [1 ; +\infty]$. $\forall f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

B.P p155 et p157

• Inégalité de Hölder : Soient $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

B.P p157

Prop : $\forall p \in [1 ; +\infty]$, $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}), \|.\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel semi-normé.

② L'espace L^p :

On voudrait plutôt un espace normé.

Déf : Soit (E, N) un $\mathbb{K}$.e.v semi-normé. Alors $V = \{ x \in E / N(x) = 0 \}$ est le noyau de N.

B.P p160

On définit $x \sim y$ ssi $x - y \in V$, relation d'équivalence compatible avec la structure d'espace vectoriel. On peut donc considérer E / V.

Déf : $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) / \{ \|f\|_p = 0 \}$. $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|.\|_p)$ est un $\mathbb{K}$ e.v normé.

Rque : $\|f - g\|_p = 0 \iff f = g$ p.p μ.

BP p161 DVPT 1

Thm de Riesz-Fisher : ⓐ $\forall p \in [1 ; +\infty[$, (L^p, μ) est complet. ⓑ Soit $(f_m) \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $f_m \xrightarrow{\|.\|_p} f$, $\exists (f_{\varphi(m)})_m$ et $g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu) / |f_{\varphi(m)}| \leq g$ μ.p.p et $f_{\varphi(m)} \xrightarrow[\mu\text{ p.p}]{} f$

B.P p170

Rque : $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ est aussi un Banach.

B.P p154

Prop : Si $\mu(X) < +\infty$ alors $L^p_\mu(\mathbb{K}) \subset L^q_\mu(\mathbb{K})$ pour $p \geq q$.

Rque : Faux sinon $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on a $\frac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{\cdot}} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2$ et $\frac{1}{\sqrt{\cdot^2+1}} \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$.

③ Convergence dans les espaces L^p :

• On a vu que si $f_m \xrightarrow{\|.\|_p} f$ alors on peut en extraire une suite-extraite qui converge presque partout. Cela est le mieux qu'on puisse faire :

B.P p163.

Contre ex : $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mu = \lambda$ $\forall k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ $f_{n,k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n} ; \frac{k+1}{2^n}[}$

B.P p164

Thm de CV dominée : Soit $(f_m)_m$ une suite de fonctions $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ avec $f_m \xrightarrow[\mu\text{ p.p}]{} f$.

ⓐ Si $\sup \|f_m\|_p < +\infty \Rightarrow f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$

ⓑ Si $\exists g \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu) / |f_m| \leq g$ μ p.p $\forall m$ alors $f_m \xrightarrow{\|.\|_p} f$.

Contre-ex : Sans domination : $L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et $f_m = m \mathbb{1}_{]0 ; \frac{1}{m}[}$. $f_m \xrightarrow[\text{p.p}]{} 0$ et $\forall m \geq 1$ $\|f_m\|_1 = 1$.

④ Densité dans les L^p :

B.P p166

Prop : $\forall p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Thm : On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

ⓐ L'ensemble des fonctions en escaliers à support compact est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ $1 \leq p < \infty$.

ⓑ L'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\lambda)$ $1 \leq p < +\infty$.

Prop : $L^1_{\mathbb{K}}(\mu) \cap L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ dense dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ $p < \infty$. * Source

$L^1_{\mathbb{K}}(\mu) \cap L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ dense dans $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$

⑤ Dualité et séparabilité :

Brézis p66

	Réflexif	Séparable	Espace dual
L^p $1<p<\infty$	oui	oui	$L^{p'}$
L^1	non	oui	L^∞
L^∞	non	non	contient strictement L^1

(*) voir dernière feuille

(2)

II) Le cas particulier de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$:

① Structure hilbertienne :

Prop : $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle_2 = \int_X f\bar{g}\,d\mu$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\bar{g}$ désigne la fonction conjuguée si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). — B L p163

Rque : Cette structure permet d'utiliser les théorèmes de projection sur un convexe fermé ou un sous-espace vectoriel fermé.

Application : • Construction de l'espérance conditionnelle pour des variables aléatoires L^2.

② $L^2(\mathbb{T})$ et séries de Fourier :

O.A p23

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le tore.

Prop : $L^2(\mathbb{T})$ est un Hilbert pour $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

Prop : $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. Comme $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$, on a $\forall f\in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$

Rque : Cette égalité est dans $L^2(\mathbb{T})$. On a donc $S_N(f) \xrightarrow[\|\cdot\|_2]{} f$.

Prop : Parseval Si $f\in L^2(\mathbb{T})$ alors $\|f\|_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$

Applications : • $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (avec $f(x) = \frac{x}{2}\ \forall x\in[-\pi,\pi[$, $f(\pi)=0$ + prol par 2π-périod) — Z.Q p103

• Inégalité Isopérimétrique

③ $L^2(I, \omega dx)$ et polynômes orthogonaux :

O.A p111

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle poids toute fonction $\omega : I \to \mathbb{R}_+^*$ / $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int_I |x|^n\omega(x)\,dx < +\infty$.

Muni de $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx$, $L^2(I, \omega dx)$ est un Hilbert.

Rop : En appliquant Gram-Schmidt à $(1, x, x^2, \dots) \in \mathbb{R}[X]$, on obtient une famille de polynômes orthogonaux associée à ω.

Thm : Si ω est tel que $\exists \alpha > 0 / \int e^{\alpha|x|}\omega(x)\,dx < +\infty$ alors la famille de polynômes est une base hilbertienne de $L^2(I, \omega dx)$. (NB : utilise la transformée de Fourier L^1.)

Exemples : * Polynômes de Hermite avec $I = \mathbb{R}$ et $\omega(x) = e^{-x^2}$

* Polynômes de Legendre avec $I = [-1, 1]$ et $\rho(x) = 1$.

Applications : • Soit $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq N$. La famille orthogonale $(P_n)_n$ permet de calculer les projections sur les $\mathcal{P}_N$

$$\mathrm{Proj}_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\langle f, P_n\rangle_\rho}{\|P_n\|_\rho^2} P_n$$

• Méthode de Gauss pour l'intégration numérique.

③ Sobolev et équations différentielles :

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit $H^m(I)$ comme l'ensemble des fonctions f / $\forall k\leq m$, $f^{(k)}\in L^2(I)$ (dérivée au sens des distributions). — Brezis p120

Prop : $H^m(I)$ muni du p.s $\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{m}\langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2}$ est un Hilbert séparable.

Déf : $H_0^1(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{H_1}$

Prop : Si I est borné et si $f\in H^1(I)$ alors $f\in H_0^1 \Rightarrow f = 0$ sur ∂I. — Hirsch Lacombe p305

Thm de Lax Milgram : Soit H un Hilbert et $a : H\times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors $\forall \varphi\in H'$, $\exists! u\in H$ | $a(u, v) = \varphi(v)\ \forall v\in H$. — Brezis p119.

Problème de Dirichlet : On cherche à résoudre : $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ sur $I =]0;1[$

Thm : Si $f\in L^2$, ce problème a une unique solution faible dans $H^1(I)$. Si de plus $f\in C(I)$ alors la solution est forte.

③

Rque : Le pb a des conditions aux bords car $f \in H^1(I) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$.

III) Utilisation des espaces L^p

① Convolution :

O.A p113

Déf : Pour f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ on appelle convolution de f et g
$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Prop : • $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\,g(x-t)$ est intégrable. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f*g$. Elle est bornée et uniformément continue
$$\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$$
• de plus, si $p \in]1, +\infty[$, on a en fait $\lim_{x \to +\infty} f*g(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} f*g(x) = 0$.

O.A p117

Prop : Régularisation.
- Si $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ alors $g*f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$
- Si $g \in \mathcal{C}_c^\infty$ alors $g*f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Déf : Identité approchée. $(\varphi_n)_n \in (L^1)^{\mathbb{N}}$ est i.a
(i) $\varphi_n(t) \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et p.p $t \in \mathbb{R}$.
(ii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,dt = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $\forall \eta > 0$ $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t|>\eta} \varphi_n(t)\,dt = 0$.

Prop : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < +\infty)$ alors $f*\varphi_n \xrightarrow[L^p]{} f$.

Application : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$

② Probabilités :

ⓐ CV L^p et CV en proba :

Barbe Ledoux p113

OUV2 p93

Prop : La convergence L^p implique la CV en proba.

Déf : Une famille de v.a (X_i) est équi-intégrable (u.i) si :
$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{i \in I} \int_{(|X_i|>a)} |X_i|\,dP = 0.$$

Rque : (X_i) u.i $\Rightarrow (X_i)$ bornée dans L^1.

OUV 2 p96

Prop : • Si (X_i) est uniformément bornée par une v.a positive et intégrable alors (X_i) est u.i (en particulier famille finie)
• Si $\exists \varepsilon > 0$ / $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^{1+\varepsilon}) < +\infty$ alors (X_n) est u.i. (souvent on montre $(X_n)_n$ bornée ds L^2).

Thm : Soit $(X_n)_n$ suite de v.a ayant moment d'ordre p : on a :
(i) (X_n) converge dans L^p
$\Updownarrow$ (ii) $(|X_n|^p)$ est u.i et $X_n \xrightarrow[P]{} X \in L^p$.

ⓑ Martingales :

OUV 2 p 36

Thm : (X_n) martingale on a alors :
(i) (X_n) u.i $\iff$ (ii) $\forall n$ $X_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ avec $Z \in L^1$.
$\iff$ (iii) (X_n) cv ds L^1 et p.s

Thm : (X_n) martingale bornée dans L^2 cv p.s et dans L^2.

③ Transformation de Fourier :

Jacques Faraut calcul $\int$ p120

Déf : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit : $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$

Prop : $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini. Ainsi la transformée de Fourier est linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Ex : $f(x) = e^{-\alpha x^2} \Rightarrow \hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-t^2/4\alpha}$

p121

Thm : • Si $x f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}' = -\widehat{ixf}$.
• Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f'} = it\hat{f}$.

Thm : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors
$f = \frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$ p.p où $\bar{\mathcal{F}}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{+itx} f(x)\,dx$

Thm : Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
$\mathcal{F}$: $L^1 \cap L^2 \to L^2$, $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$ se prolonge en une isométrie surjective de $L^2(\mathbb{R})$.

p126

Applications : × Résolutions d'équa diff.

Thm d'échantillonnage de Shannon :

Willem p126 DVPT 2

$U : BL^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $u \mapsto (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie d'espace de Hilbert.
$\forall u \in BL^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k)\, \operatorname{sinc}(x-k)$$
$(BL^2 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{F}(f) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\})$.

1

Références :

- × Briane Pagès
- × O.A
- × Z.Q
- × Hirsch_Lacombe
- × Barbe_Ledoux "Probabilités"
- × Gourdon ?
- × Jacques Faraut : Calcul intégral
- × Willem

(*) Détails sur la partie dualité - séparabilité

① ↳ $(L^p)' \simeq L^{p'}$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $1 < p < \infty$

Thm de Riesz : Soit $1 \leq p < \infty$ et $\varphi \in (L^p)'$ alors il existe $u \in L^{p'}$ unique /
$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p$

de plus, on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$ Brezis p61

② ↳ Rappel : E est dit réflexif si $J(E) = E''$
où $J : E \longrightarrow E''$
$x \longmapsto (\underset{\in E'}{f} \longmapsto \underset{\in \mathbb{R}}{\langle f, x \rangle})$

(J est linéaire et est une isométrie on cherche donc les cas où J est surjective).