MÉTHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION $F(X)=0$. EXEMPLES.

Cadre: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. On veut approximer a tel que $F(a)=0$ en construisant itérativement une suite (x_n) qui tende vers a.

Vitesse de convergence

[EXAMPLES] **Déf 1** Soit (x_n) une méthode itérative pour $f(a)=0$. L'erreur est notée $e_n = x_n - a$.

- Si $\|e_{n+1}\| \leq L \|e_n\|$ avec $L<1$ la convergence est linéaire ou d'ordre 1
- Si $\|e_{n+1}\| \leq q_n \|e_n\|$ avec $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ la convergence est superlinéaire
- Si $\|e_{n+1}\| \leq C\|e_n\|^p$ on dit que la méthode est exponentielle d'ordre p. Pour $p=2$ on parle de convergence quadratique.

I - GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉTHODE DE POINT FIXE

1 - Théorème de Picard

Thm 2 Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ k-contractante $(k<1)$, alors f admet un unique point fixe ℓ et pour tout $x_0 \in E$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ avec

$$|x_{n+1} - \ell| \leq k|x_n - \ell| \leq k^{n+1}|x_0 - \ell|$$

Principe: poser $g(x) = x + \lambda F(x)$ pour λ fixé tel que g strictement contractante. Alors $F(a)=0$ ssi $g(a)=a$ et on applique le thm 2 à g. La convergence est exponentielle d'ordre 1.

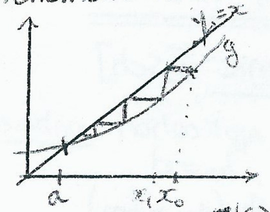
2 - Points fixes attractifs et répulsifs ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Déf 3 Soit $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 et soit $a \in I$ tq $g(a)=a$

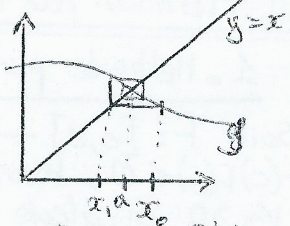
- a est attractif si $|g'(a)|<1$
- a est répulsif si $|g'(a)|>1$

Prop 4 (convergence locale)

- Si a attractif alors $\exists J$ centré en a, stable par g tel que $\forall x_0 \in J$ la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ converge exponentiellement d'ordre 1 vers a.

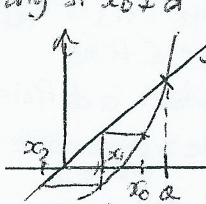


cas $0<g'(a)<1$

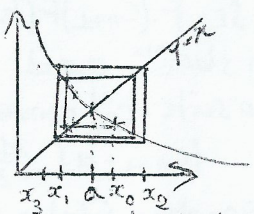


cas $-1<g'(a)<0$

- Si a répulsif alors $\exists J$ centré en a, tq $\forall x_0 \in J$ la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ sorte de J à partir d'un certain rang si $x_0 \neq a$



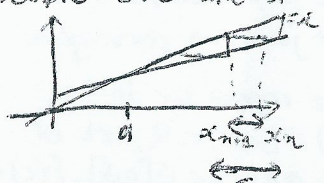
cas $g'(a)>1$



cas $g'(a)<-1$

Rq: Trouver une condition d'arrêt est difficile.

Exemple: $\varepsilon > 0$ arrêt si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$



si "$F'(a) \approx 1$"

[BAR2, p23]

3- Accélération Δ^2 d'Aitken ($g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) [BAR2, POM]

Pour une suite (x_n) de réels on définit l'opérateur Δ par: $(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta^2 x_n = \Delta\Delta x_n$.

Thm 5 Soit $x_n \to a$ avec l'erreur $e_n = x_n - a$

vérifiant $e_{n+1} = (A+\varepsilon_n) e_n$, $e_n \neq 0$, $|A|<1$, $\varepsilon_n \to 0$

Alors $x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$ vérifie $\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - a}{x_n - a} = 0$

II Méthodes pour les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Méthode par dichotomie [Sch]

Soit $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ une application continue tq $f(c)f(d) < 0$. Posons $a_0 = c$; $b_0 = d$

$\forall n \geq 0$ on calcule $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

& Si $f(c_{n+1}) = 0$ alors on a trouvé un zéro de f

& Si $f(a_n)f(c_{n+1}) < 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_{n+1}$

& Si $f(c_{n+1})f(b_n) < 0$ on pose $a_{n+1} = c_{n+1}$ et $b_{n+1} = b_n$

On s'arrête quand $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ pour ε fixé

La suite (c_n) converge vers une solution a de $f(x)=0$.

$$|c_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|c_n - a| \to \text{Vitesse = exponentielle d'ordre 1.}$$

Exemple: $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1, 3/2]$

$c_1 = 1{,}25$ $c_2 = 1{,}375$ $c_3 = 1{,}4375$

$c_4 = 1{,}40625$ $c_5 = 1{,}421875$

5 itérations $\to$ 1 décimale juste $\to$ convergence assez lente.

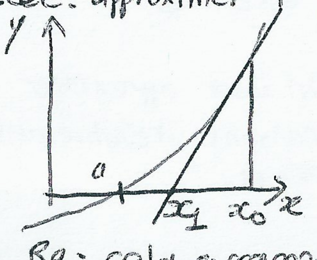
La validité de la méthode repose sur le

Thm 6 (Valeurs intermédiaires) : $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a \neq b$ et

$f \in C^0([a,b])$. Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = 0$.

2. Méthode de Newton ($m=1$) [Dem]

Idée: approximer f par sa tangente



$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

dont l'intersection avec $y=0$ est:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = g(x_0)$$

si $f(x_0) \neq 0$.

Rq: cela correspond à une méthode itérative à point fixe : $g(x) = x + \lambda(x) f(x)$ avec $\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.

Thm 7 (convergence locale) Soit $f \in C^2(I)$ où

$I = [a-r, a+r]$ et $f' \neq 0$ sur I. Soit $M = \max_{x \in I} \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$

et $h = \min(r, \frac{1}{M})$. Alors pour tout $x \in [a-h, a+h]$ on a $|g(x) - a| \leq M|x-a|^2$ et pour tout $x_0 \in [a-h, a+h]$

$$|x_p - a| \leq \frac{1}{n}(M|x_0 - a|)^{2^p}$$

La convergence est donc localement quadratique : en pratique le nombre de décimales justes double à chaque itération.

Exemple $f(x) = x^2 - 2$ $x_0 = 1$ [Sch]

$x_0 = 1$ $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = \underline{1{,}41}66666666$

$x_3 = \underline{1{,}41421}568628$ $x_4 = \underline{1{,}41421356237}$

$x_5 = x_4$. $\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$

Méthode de Newton pour les polynômes.

Thm 8 Soit $P = (X - \varepsilon_1)^{m_1} \cdots (X - \varepsilon_r)^{m_r}$ $\varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_r$, $m_i \geq 1$

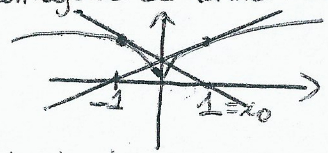
On pose $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \end{cases}$

Alors : - si $x_0 > \varepsilon_r$, $(x_n)_n$ bien définie, $x_n \geq \varepsilon_r$ et x_n décroît strictement vers ε_r

- si $m_r = 1$ la convergence est quadratique

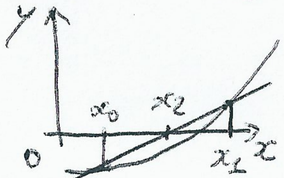
Exemple de non convergence de la méthode de Newton :

$f(x) = \sqrt{|x|}$



3 - Méthode de la sécante [Dem]

Parfois le calcul de $f'(x)$ n'est pas aisé, on approche donc $f'(x)$ par $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ dans la méthode de Newton. Soient x_0 et x_1 deux approximations de a on pose $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - x_{n-1}} f(x_n)$



Rq : il existe un thm de convergence par cette méthode [voir DEM p103]

Exemple $f(x) = x^2 - 2$ [Sch]

$x_0 = \underline{1},5$ $x_1 = \underline{1,4}$ $x_2 = \underline{1,41}37931 0345$

$x_3 = \underline{1,414215}\,68628$ $x_4 = \underline{1,414\,2135620}6$

$x_5 = \underline{1,41421356237}$

III Méthodes pour les fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

1) Méthode de Newton-Raphson [Dem]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^2 $f(a) = 0$. Soit x_0 une approximation de a, on va approximer f par sa partie linéaire

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

et on résout $f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) = 0$. Si Df_{x_0} inversible, on a $x_1 = x_0 - Df_{x_0}^{-1}(f(x_0))$. On pose donc

$$x_{m+1} = x_n - Df_{x_n}^{-1}(f(x_n))$$

Thm 9 Soit F de classe C^2, $F(a) = 0$ et Df_a inversible. Alors il existe V voisinage de a tel que $\forall x_0 \in V$, x_n convergera vers a avec vitesse quadratique.

Exemple : Résolution de $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ x\exp(x) + y\exp(y) = 0 \end{cases}$

2) Cas des applications affines [Ser], [BAR]

F s'écrit $F(x) = Ax - b$ avec $A \in M_m(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^m$ et $f(x) = 0$ revient à résoudre $Ax = b$.

On décompose $A = M - N$ M inversible $x_0 \in \mathbb{C}^m$

$x^{(m+1)} = M^{-1}(Nx^{(m)} + b)$

Prop 10 Si $\rho(M^{-1}N) < 1$ alors cette méthode itérative converge vers a solution de $f(a) = 0$ et réciproquement.

Deux exemples : Jacobi et Gauss-Seidel

On note $A = D - E - F = \begin{pmatrix} d_1 & & -F \\ & \ddots & \\ -E & & d_n \end{pmatrix}$

Méthode	M	N	expression de $x_i^{(n+1)}$
Jacobi	D	E+F	$\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(n)}\right)$
Gauss Seidel	D-E	F	$\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(n+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(n)}\right)$

Prop 11 Si A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi converge ainsi que celle de Gauss-Seidel.

Prop 12 Si A est hermitienne définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge

Rq typiquement une dizaine d'itérations donnent une solution précise à comparer au coût en $O(n^3)$ de l'inversion matricielle.

(+) Méthodes de gradient ~~[illegible]~~

· optimisation à la Lax-Milgram

Références

[BAR] Jacques Beranger, Analyse numérique

[BAR2] Jacques Beranger, Introduction à l'analyse numérique

[Sch] Michelle Schatzman, Analyse numérique

[Dem] Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles

[Pom] Alain Pommellet, Agrégation de maths

[Ser] Denis Serre, Les matrices