230 : Séries de nombre réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

13

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions, séries à termes positifs

1. Définitions [G, p 200]

Déf : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.

S_n est la somme partielle d'indice n.

On dit que $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge, et dans ce cas, $\lim S_n$ est la somme de la série, notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Si $\sum u_n$ converge, on définit pour tout n le reste d'indice n par :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Ex : $q \in \mathbb{K}$. La série $\sum q^n$ est appelée série géométrique, convergente ssi $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Déf : Une série $\sum u_n$ est dite de Cauchy si $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Prop : La série $\sum u_n$ converge ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$

Cor : Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

Déf : Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.

Thm : Une série absolument convergente est convergente.

2. Comparaison [G, p201]

Dans la suite, $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

Thm : $\sum u_n$ converge ssi (S_n) majorée.

Thm : . Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors $((\sum v_n \text{ converge}) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge}))$

. Si $u_n = O(v_n)$, alors $((\sum v_n \text{ converge}) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge}))$

Thm : On suppose $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors :

. Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ aussi et les restes des séries sont équivalents.

. Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi et les sommes partielles sont équivalentes.

App : Formule de Stirling : [G, p212] 211

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$$

Ex : Développement asymptotique de la suite définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0 \in (0, \pi/2]$ [G, p218]

3. Critères usuels [G, p206]

Dans ce paragraphe, on suppose $u_n > 0$ $\forall n$.

Prop : Règle de d'Alembert. On suppose $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut $\lambda \in [0, +\infty]$.

. si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge

. si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge

. si $\lambda = 1^+$, $\sum u_n$ diverge

Prop : Règle de Cauchy. On suppose $\lim \sqrt[n]{u_n}$ existe et vaut $\lambda \in [0, +\infty]$.

. si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge

. si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge

. si $\lambda = 1^+$, $\sum u_n$ diverge

Prop : Règle de Raab-Duhamel. On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + a/n + O(1/n^\alpha)}$.

Si $a > 1$ et $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.

4. Comparaison à des séries usuelles [G, p204]

Prop : Séries de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Prop : Séries de Bertrand. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ ssi $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

La combinaison du I.2 et des séries géométriques, de Riemann et de Bertrand permet de traiter de nombreux exemples.

Ex : . $\sum \frac{\sin^2 n}{n^2}$ converge

. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge

II. Cas général

On revient au cas $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

1. La transformation d'Abel [G, p207]

Méthode : Soit $u_n = \alpha_n v_n$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

Thm : Règle d'Abel
Avec les notations précédentes :
si (α_n) est positive, décroissante, tend vers 0 et (S_n) bornée, alors $\sum \alpha_n u_n$ converge.

App : Critère des séries alternées
Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge
$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$.

Ex : $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

2. Ordre des termes [S p 301]

Déf : On dit que $\sum u_n$ est commutativement convergente et de somme S si pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et a pour somme S.

Thm : $\sum u_n$ converge absolument ssi $\sum u_n$ converge commutativement.

Thm : de Riemann [X¹, p206]
Soit $\sum u_n$ série réelle semi-convergente, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge, et
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = \alpha$$

Thm : Sommation par paquet [S, p 305]
Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une partition de $\mathbb{N}$, et soit $\sum u_n$ commutativement convergente. Alors $\forall \alpha \in A$, $\sum_{n \in I_\alpha} u_n$ converge commutativement, vers S_α, et $\sum_{\alpha \in A} S_\alpha$ converge commutativement, et on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{\alpha \in A} \sum_{n \in I_\alpha} u_n$$

Ex : [X², p136] On note p_n le $n^{\text{ième}}$ entier naturel non nul dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9.
Alors $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

3. Produit de convolution [C, p64]

Thm : de Mertens
Soit $\sum u_n$ absolument convergente de somme U, et soit $\sum v_n$ une série convergente de somme V. Alors la série $\sum w_n$, où $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$, converge, et a pour somme UV.

Ex : Contre exemple de Cauchy [H, p126]
$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. La série produit diverge

4. Séries doubles [G, p208]

Thm : Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite à double entrée. Sont équivalentes :
(i) $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{p,q}$ converge absolument et $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge
(ii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_q u_{p,q}$ converge absolument, et $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{\infty} \|u_{p,q}\|\right)$ converge.
et dans ce cas, $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}$

Ex : $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$ où $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ [G, p2..]

III. Utilisation de fonctions

1. Utilisation d'une intégrale [G, p204]

Thm : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante, continue par morceaux. Alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Thm : Le résultat reste vrai si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, avec $f' \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Ex : [X¹, p143] $\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor = 2997$

Thm : Soient $x_0 \geq 0$, et $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors si $\int_{x_0}^{\infty} |f'(t)|\,dt$ converge, alors $\sum f(n)$ et $\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. [Z-Q..]

App : On peut prolonger $\zeta : \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ à $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$. [Z-Q p..]

2. Séries entières [G, p236]

Déf : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, où z est une variable complexe, et $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On appelle rayon de convergence le nombre

$$R = \sup\{r\geq 0 \mid \exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |a_n r^n|<M\}$$

Thm : d'Abel angulaire [G, p272]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geq 1$, telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. Pour $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2})$, on pose $\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1 \mid \exists \rho>0\ \exists\varphi\in[-\theta_0,\theta_0],\ z=1-\rho e^{i\varphi}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

DVT

Ex : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\arctan x=\pi/4$

Thm : taubérien faible. [G, p273]

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $R\geq 1$, et soit f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose $\exists S\in\mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=S$ et $a_n=o(1/n)$. Alors $\sum a_n$ converge, vers S.

Rem : Le théorème d'Abel permet de démontrer le théorème de Mertens [P, p234].

3. Séries de Fourier [G, p270]

Déf : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique, continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

On appelle série de Fourier associée à f la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$

Thm : de Dirichlet

si f est 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour ~~tout~~ x de $\mathbb{R}$, $\sum c_n(f)e^{inx}$ converge, vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

App : Formule d'Euler [X², p237]

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k},\ \text{où}$$

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n.$$

Thm : Formule de Parseval.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$ converge, et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$$

Ex : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Thm : Formule sommatoire de Poisson [G, p272]

Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\hat{f}(n)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}$.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)$

App : Pour tout $s>0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s}=s^{-1/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$$

Références :

[G] : Gourdon, Analyse

[C] : Combes, Suites et séries

[P] : Pommellet, Analyse

[H] : Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques

[X¹] (resp. [X²]) : Oraux X-ENS. Analyse 1 (resp. 2)

[S] : Schwartz, Analyse I.

[Z-Q] : Zuily - Queffélec, Éléments d'analyse pour l'agrégation

Développements alternatifs :

- Euler - MacLaurin + développement asymptotique de la série harmonique
- Théorème de Müntz
- Euler - MacLaurin ordre 1 + prolongement de ζ.
- Théorème taubérien fort

DVT