229 - Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et Applications.

I - Fonctions monotones, définition, premières propriétés [T-M]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : f une application réelle définie sur I est dite
- croissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x,y) \in I^2 \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x,y) \in I^2 \; x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- monotone sur $I \Leftrightarrow$ elle est croissante ~~et~~ ou décroissante sur I.

Remarque : en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes on définit les notions d'applications strictement croissantes, strictement décroissantes, strictement monotones.

Exemple 2 : - Les fonctions de répartition sont croissantes
- La fonction partie entière est croissante

Propriété 3 : La somme et la composée de deux fonctions croissantes est croissante. La multiplication par un scalaire positif d'une fonction croissante est croissante.

Remarque : Le produit de deux fonctions croissantes n'est pas forcément croissant : contre-exemple : $f(x)=x \quad g(x)=x$

Théorème 4 : (de la limite monotone) Soit f une application réelle croissante définie sur I. Soient a et b les extrémités de I. f admet en tout point $x_0 \in \mathring{I}$ une limite à gauche $f(x_0^-)$ réelle et une limite à droite $f(x_0^+)$ réelle. Et on a :
$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$$

Théorème 5 : Soit f une application monotone définie sur I. Alors f est continue sur $I \Leftrightarrow f(I)$ est un intervalle.

Théorème 6 : Soit f une application monotone définie sur I. Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Théorème 7 : Une application monotone est dérivable pp.

Théorème 8 : Soit f une application réelle continue définie sur I. Alors f est injective sur $I \Leftrightarrow f$ est strictement monotone sur I.

Théorème 9 : Soit f une application définie, continue et strictement monotone sur I. Alors f induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$

Propriété 10 : Soit f une application réelle définie et dérivable sur I. Alors f est croissante $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
f est strictement croissante $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \; \forall x \in I$ et s'annule en un nombre fini de point.

Remarque : Vrai que sur un intervalle : contre-exemple $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$

Théorème 11 : (de Dini) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions croissantes réelles continues définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur $[a,b]$ Alors (f_n) converge uniformément vers f. [G] p229

Théorème 12 : (de Helly) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))$ est bornée. Alors il existe une sous suite de (f_n) qui converge vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ croissante simplement. [G] p235

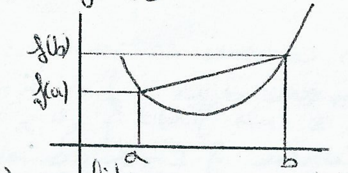
II - Fonctions convexes, définitions, premières propriétés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

1 - Définitions et caractérisations [G]

Définition 13 : * Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1] \quad f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$
* f est dite concave si $-f$ est convexe.

Remarques : - Une fonction est convexe et concave $\Leftrightarrow$ elle est affine.
- Si l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe
- L'inégalité exprime le fait que tous les points du segment $[(a, f(a)) ; (b, f(b))]$ sont au-dessus du graphe de f :

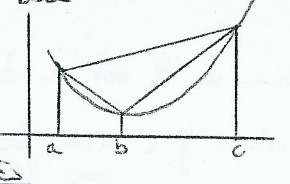


exemple 14 : $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ euclidien. $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe [O-A]

Caractérisation 15 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe $\Leftrightarrow$ son épigraphe $\text{épi}(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ est convexe

Caractérisation 16 Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$
$$g_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ est croissante.

Conséquence 17 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si $a, b, c \in I$ avec $a<b<c$ on a :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$



2 - Premières propriétés

Propriété 18 : La somme de deux fonctions convexes est convexe. Le produit par un scalaire positif d'une fonction convexe est convexe. [P]

Remarques : • le produit de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe : contre exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.
• Le produit de deux fonctions convexes positives et croissantes est convexe.

Propriété 19 : Si f est une fonction convexe croissante et si g est une fonction convexe alors $f \circ g$ est convexe. [G] p101

Définition 20 : Une application positive f est log-convexe si $\log \circ f$ est convexe.

Application 21 : Les fonctions log-convexes sont convexes

Propriété 22 : Soit une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors [G]
$\forall x_1, \dots, x_n \in I$ et $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$
$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

Application 23 : Inégalité de Kantorovitch [H-U] p27
Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4} \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n} \|x\|^4$$

Propriété 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe si elle est majorée elle est constante

Remarque : f doit être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier : contre exemple $\begin{array}{l}[-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$

3. Régularité

Remarque 25 : Les fonctions convexes ne sont pas forcément continues [H] p198
exemple : $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

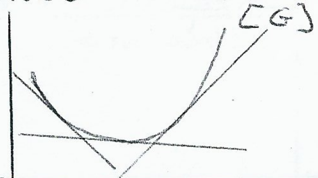
Propriété 26 : Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ admet en tout point de $\mathring{I}$ des dérivées à droite et à gauche f'_d et f'_g. [P]

Corollaire 27 : Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathring{I}$. [P]

Propriété 28 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ $\forall x \in \mathring{I}$ [G]

Théorème 29 : Soit f une fonction convexe sur I. L'ensemble des points de non dérivabilité de f est dénombrable. [G-T] p17

Théorème 30 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes : [G]
(i) f est convexe
(ii) f' est croissante
(iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes



Corollaire 31 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe $\iff f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ [G]

4- Généralisation des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ [O-A]

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique, et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Théorème 32 : (Caractérisation de la convexité) Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Si f est différentiable sur U alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe
(ii) le graphe de f est "au dessus de ses tangentes"
$\forall x, y \in U$ $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$
(iii) L'application $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ est monotone :
$\forall x, y \in U$ $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$
Si f est deux fois différentiable sur U et $Hf(x)$ la matrice hessienne de f
(iv) $Hf(x)$ est positive : $\forall x, h \in U$ $\langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0$

Remarque : U doit être ouvert : contre-exemple :
$(x,y) \to f(x,y) = x^2 - y^2$ est convexe sur $C = \mathbb{R} \times \{0\}$
mais $Hf(x,y)$ n'est pas positive.

Corollaire 33 : Fonction quadratique : Soit $A \in S_n$ une matrice symétrique alors : $x \to f(x) = \langle Ax, x \rangle$ est convexe $\iff A$ est positive

III - Applications

1 - Comparaison série-intégrale [G] p206

Proposition 34 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (u_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$ est convergente
En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

exemple 35 : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto 1/(1+x)$ décroissante
Alors $u_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n - \log n$ converge. (constante d'Euler)

2- Inégalités classiques

*** Inégalité arithmético-géométrique** [G]
Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs. On a
$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$
cas d'égalité $\iff x_1 = \dots = x_n$

*** Inégalité de Hölder** : [G]
Soient deux nombres réels $p, q \geq 0$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour tout réels positifs $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ on a
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

*** Inégalité de Minkowsky** : [G]
Soient $p \geq 1$ un réel et $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ des réels positifs. Alors
$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}$$
Application : $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

*Inégalité de Jensen [P]

Soit f une fonction intégrable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, à valeur dans l'intervalle $]a,b[$ et soit φ une fonction convexe de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. Alors $I = \int_0^1 f(x)dx \in]a,b[$ et on a :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(x)dx$$

3- Sup de fonctions convexes [OA]

Théorème 36 : Soient C une partie convexe de E et $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur C. S'il existe une fonction $g : C \to \mathbb{R}$ telle que $f_j(x) \leq g(x)$ $\forall x \in C$ et $\forall j \in J$. Alors $\sup_{j\in J} f_j$ est une fonction convexe sur C.

Application : La plus grande valeur propre.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda_{max}(A)$ la plus grande de ses valeurs propres (qui sont toutes réelles). On a

$$f : \begin{array}{l} S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \lambda_{max}(A) \end{array} \quad \text{est convexe.}$$

4- Optimisation [OA]

Théorème 37 : Soient C un ouvert d'un $\mathbb{R}$-ev et f une application convexe de C dans $\mathbb{R}$. Alors si f est différentiable en x_0

x_0 est un minimum local de $f \iff df(x_0) = 0$ (p16)

Remarques. * Si f n'est pas convexe, ce n'est qu'une condition nécessaire : contre-exemple : $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^3\end{array}$ en 0

* C doit être ouvert : contre-exemple : $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t\end{array}$

Théorème 38 : Soient C un ouvert d'un $\mathbb{R}$-ev E, $x_0 \in E$, (p18) $f : C \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en a et convexe sur C, alors : si $df(x_0) = 0$: - x_0 est un minimum local $\iff d^2f(x_0)$ est positive

- x_0 est un min local strict $\iff d^2f(x_0)$ est définie positive

* Existence du minimum (p30)

Théorème 39 : Soit E un ev de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue et coercive ; C un fermé de E. Alors f est minorée sur C et atteint son minimum.

* Unicité du minimum

Théorème 40 : Soient C un convexe non vide et $f : C \to \mathbb{R}$ une application strictement convexe sur C. Alors il existe au plus un $x_0 \in C$ minimisant f sur C.

De plus, si C est compact $f : C \to \mathbb{R}$ admet un unique minimum.

Application : Ellipsoïde de John-Loewner [Allessandri]

Théorème 41 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur. Alors il existe une unique ellipsoïde de volume minimal centrée en 0 contenant K. [DVP]

Application : Méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 42 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On pose [H-U] p6..

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \end{cases}$$

On prend $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ $\forall k \geq 0$ avec

$d_k = -\nabla f(x_k) = -(Ax_k + b)$

$t_k = \dfrac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle}$

Alors f a un unique minimum sur $\mathbb{R}^d$ atteint en $\bar{x} = A^{-1}b$. De plus la méthode du gradient à pas optimal (décrite ci-dessus) converge vers $\bar{x}$ avec une vitesse exponentielle de raison $\left(\frac{c-1}{c+1}\right)$ où c est le conditionnement de A. [DVP]

Bibliographie :

[G] : Gourdon, Analyse

[OA] : Objectif Agrégation

[TM] : Tisier-Mialot : Fonction d'une variable réelle

[H-U] : Hiriart-Urruty : Optimisation

[Allessandri] : Allessandri

[P] : Pommellet.

Développements : - Ellipsoïde de John Loewner

- Méthode du gradient à pas optimal.

alternatif : - Théorème de Helly

Ajout possible : fcts à variations bornées