Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. (228)
Exemples et contre-exemples.

I - Définitions et premières propriétés

1) Continuité [GOU] [HAU] [MAD]

déf: Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in A$.
$f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in A\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

ex: (1) Les fonctions constantes, affines, polynômes sont continues.
(2) Une fonction convexe sur un intervalle I est continue sur $\mathring{I}$
(3) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.

prop: Caractérisation séquentielle de la continuité
$f : A \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in A \Longleftrightarrow$ Pour toute suite (x_n) convergeant vers a, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$

Contre-exemple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0

Ens des pts de continuité $= G_\delta$ ($\bigcap$ dén. d'ouverts)
$\bigcap \Omega_n$ où $\Omega_n := \{x \mid \exists U_x$ ouvert tq $\forall y, z \in U_x$ $|f(y) - f(z)| \leq \frac{1}{n}\}$

Application: Th du point fixe. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application k-contractante.
Alors f admet un unique point fixe.

Th de prolongement par continuité: Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que f n'est pas définie en a.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$ existe, la fonction g définie sur $A \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ sur A et $g(a) = \ell$
est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

ex: $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en 0

déf: $f : A \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $A \subset \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in A,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ex: Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

prop: Si f est uniformément continue sur A alors f est continue sur A.

Contre-exemple: $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue mais pas uniformément continue sur $]0,1]$

2) Discontinuité [GOU] [RM]

déf: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
(1) f admet une discontinuité de première espèce en $x_0 \in \mathring{I}$ si f n'est pas continue en x_0 et si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0.
(2) f admet une discontinuité de deuxième espèce en $x_0 \in \mathring{I}$ si f est discontinue en x_0 et si la discontinuité n'est pas de première espèce.

ex: $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ possède une discontinuité de deuxième espèce en 0

déf: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si elle est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions en escaliers.

ex: Toute fonction continue est réglée.

Application: Construction de l'intégrale de Riemann

Th: $f : [a,b] \to$ réglée $\Longleftrightarrow$ Tout point de discontinuité de f est de première espèce.
L'ensemble des points de discontinuité de f est alors au plus dénombrable.

ex: Toute fonction monotone est réglée.

3) Dérivabilité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. [GOU] [HAU]

déf: f est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t \in I \setminus \{a\}}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe, et dans ce cas cette limite est notée $f'(a)$

rq: Une fonction dérivée n'a que des discontinuités de ~~première~~ 2e espèce.

ex: (1) $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en tout réel non nul, mais elle n'est ni dérivable à droite ni dérivable à gauche en 0

(2) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ est dérivable en 0 et discontinue en tout réel $\neq 0$

rq: Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

Contre-exemple: Soit Δ définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, telle que $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\ \Delta(x) = |x|$
la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$

rq: Une fonction dérivée n'est pas forcément continue.

Contre-exemple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue en 0

déf: (1) On définit par récurrence la fonction dérivée n-ième, si elle existe, par $f'' = (f')'$; … , $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, …
(2) $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si $f^{(n)}$ existe sur I et est continue sur I.
(3) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

prop: Formule de Leibniz. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(a)$ existent.
Alors le produit fg est n fois dérivable en a et $(fg)^{(n)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$

prop: L'ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

prop: Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$, $g : I \to J$, $a \in I$ tel que f est dérivable en a, g est dérivable en $f(a)$.
L'application composée $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot (f' \circ g)(a)$

II - Théorèmes fondamentaux

1) Continuité et compacité [GOU] [POM]

prop: Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique, $f : E \to F$ continue. Alors $f(E)$ est compact.

prop: Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ continue, avec (E,d) compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Th de Heine: Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, E étant compact, $f : E \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.

ex: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Alors f est uniformément continue.

Applications: (1) Une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

DVPT (2) Th de Weierstrass: Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

(3) L'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

2) Continuité et connexité [GOU] [POM] [HAU]

Th: Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ continue. Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Th des valeurs intermédiaires: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Applications: (1) Méthode de dichotomie
(2) Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

prop: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. f est injective $\Leftrightarrow$ f est strictement monotone.

prop: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante. f est continue $\Leftrightarrow$ $f(I)$ est un intervalle.

Application: Si f est une bijection continue de l'intervalle I sur l'intervalle J, alors f^{-1} est continue. autrement dit f est un homéomorphisme.

3) Extrema, dérivation et conséquences [GOU] [HAU]

Th: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$
Si f admet un extremum relatif en $c \in \mathring{I}$ et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

rq: (1) La réciproque est fausse. Contre-exemple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extremum en 0

(2) Le théorème est faux si c est une extrémité de I: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est dérivable sur $[0,1]$ et admet un minimum local en 0, mais $f'(0) = 1 \neq 0$

(3) Une application peut admettre un minimum local en c sans être dérivable en c: $f : x \longmapsto \begin{cases} |x| \sin^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Th de Rolle: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Contre-exemple: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $]0,1[$, $f(0) = f(1) = 1$, mais $\forall x \in]0,1[$ $f'(x) = 1 \neq 0$

Application: Si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est aussi scindé.

Th des accroissements finis: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists$ $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Conséquence: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
f est croissante $\Leftrightarrow \forall x \in]a,b[\ f'(x) \geq 0$ $\quad$ f est constante $\Leftrightarrow \forall x \in]a,b[\ f'(x) = 0$

rq: le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont faux lorsque f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$-evn.

Contre-exemple: $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ $\quad f(0) = f(2\pi)$, f est dérivable sur $[0,2\pi]$, mais $\forall t \in [0,2\pi]$ $f'(t) = ie^{it} \neq 0$

Applications: (1) Th de Darboux: Soient I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

(2) Prolongement d'une fonction dérivable:
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$ existe. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

Th des accroissements finis généralisés:
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

Application: Règle de L'Hospital Si $f(a) = g(a) = 0$ et si $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Formule de Taylor-Lagrange: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

III - Continuité et dérivabilité de fonctions particulières

1) Limites de fonctions [GOU] [HAU]

Soient (f_n) une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

déf : (1) (f_n) converge simplement vers f si $\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(2) (f_n) converge uniformément vers f si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

rq : la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue.

Contre-exemple : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Th : La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.

Contre-exemple : $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$. La suite de fonctions continues (f_n) converge simplement mais pas uniformément vers la fonction nulle qui est continue.

Th de Dini : (1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.

(2) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ croissantes et continues. Si (f_n) converge simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors la convergence est uniforme.

Th : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions définies et dérivables sur Ω, qui converge simplement sur Ω vers une fonction f.
Si la suite (f_n') des fonctions dérivées converge uniformément vers une fonction g définie sur Ω alors la fonction f est dérivable sur Ω et $f' = g$.

Contre-exemple : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ non dérivable en 0.

2) Intégrales [HAU] [BP]

Soient I, J des intervalles réels, $J = [a,b]$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Th : Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$ $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J. Si $\forall x \in I$ f_x est continue sur J et s'il existe une fonction φ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, intégrable sur J, telle que $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $x \in I$ et tout $t \in J$, alors la fonction f_x est intégrable sur J pour tout $x \in J$ et la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur I.

Contre-exemple : Soit $f : [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto x e^{-xt}$. f est continue et la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,dt$ existe mais n'est pas continue en 0.

prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Alors $\forall a \in I$, la fonction $F_a : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est définie et dérivable sur I, et $\forall x \in I$ $F_a'(x) = f(x)$.

Contre-exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ n'est pas dérivable en 0.

Th : Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ telle que $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J pour tout $x \in I$. Si pour tout $x \in I$ f_x est continue sur J, s'il existe φ positive, intégrable sur J, telle que $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ $\forall x \in I$ et $\forall t \in J$, si la dérivée partielle de f par rapport à x existe en tout point (x,t) de $I \times J$ et si pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est continue sur J et s'il existe ψ positive, définie et intégrable sur J telle que pour tout $x \in I$ et tout $t \in J$ $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq \psi(t)$, alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I$ $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$

Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto x^2 e^{-t|x|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, mais $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ n'est pas dérivable en 0.

Th : Si $g : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $a \in I$, pour tout $x \in I$, $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\,dt$

Contre-exemple : Fonction de Lebesgue
Il existe une fonction f continue, croissante sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et $f' = 0$ à pp sur $[0,1]$.
En particulier, $\int_0^1 f'(x)\,dx = 0 < f(1) - f(0) = 1$) DVPT

Références :
[GOU] X. Gourdon, Les maths en tête, Analyse
[POM] A. Pommellet, Cours d'Analyse
[HAU] B. Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques
[MAD] K. Madère, Leçons d'analyse
[BP] M. Briane, G. Pagès, Théorie de l'intégration