226 : COMPORTEMENT D'UNE SUITE REELLE OU VECTORIELLE DEFINIE PAR UNE ITERATION $U_{n+1}=F(U_n)$. EXEMPLES.

Déf : Soient (E,d) un espace métrique et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre p si on peut écrire : $\forall n \geq p$, $u_n = f(u_{n-1},\dots,u_{n-p})$ où $f : E^p \to E$

I°) ETUDE EN DIMENSION 1

1.1. Cas où f est affine ($u_{n+1} = au_n + b$) [De Biasi]

- $u_{n+1} = u_n + b \Rightarrow u_n = u_0 + nb$ et $S_n = (n+1)u_0 + \frac{1}{2}n(n+1)b$.
- $u_{n+1} = au_n \Rightarrow u_n = u_0 \times a^n$ et $S_n = u_0 \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$
- cas général : $u_{n+1} = au_n + b \Rightarrow u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$

→ application : Annuités A de remboursement d'un emprunt

soient $\begin{cases} C_0 : \text{capital emprunté remboursable en } n \text{ annuités} \\ \tau : \text{taux d'intérêts} \\ A : \text{annuité} \end{cases}$

et c_k le capital restant dû après le versement de la $k^{\text{ième}}$ annuité

on a $c_{k+1} = (1+\tau)c_k - A$. Comme $C_n = 0$, on obtient :

$$A = c_0 \frac{\tau(1+\tau)^n}{(1+\tau)^n - 1}$$

→ application aux suites homographiques

Il s'agit du cas où $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$

considérons (E) : $c\ell^2 + (d-a)\ell - b = 0$

* si (E) a deux racines distinctes α et β, alors :
  - si $u_0 = \alpha$ ou β, alors la suite est stationnaire
  - sinon, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$: $v_{n+1} = kv_n$ où $k = \dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}$
    - → si $|k| < 1$, $\lim u_n = \beta$
    - → si $|k| > 1$, $\lim u_n = \alpha$
    - → si $k = -1$, $(u_n)_n$ diverge
* si (E) a une racine double α :
  - si $u_0 = \alpha$, alors la suite est stationnaire
  - sinon, $\lim u_n = \alpha$.
* Sinon la suite $(u_n)_n$ diverge

1.2. Etude générale

ⓐ cas où $f : I \to I$ est continue (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$)

Prop : soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Alors, f étant continue, on a $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f.

Csq : si $I = [a,b]$, a et $b < \infty$, alors il y a équivalence entre :
(i) la suite $(u_n)_n$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Prop :
- si f est croissante, alors $(u_n)_n$ est monotone :
  * croissante si $u_0 - u_1 \leq 0$
  * décroissante si $u_0 - u_1 \geq 0$
- si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante. Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones, de monotonie contraire, adjacentes.

Ex : Etude des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par
$\begin{cases} u_n \geq 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_n \geq 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{1+v_n^2} \end{cases}$

Thm du point fixe : soit $f : E \to E$ (complet) une application continue k-contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in E$. De plus pour tout point $u_0 \in E$, la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a et on a la majoration suivante :
$$d(u_n, a) \leq k^n d(u_0, a)$$
(la convergence de la suite vers a est au moins aussi rapide qu'une suite géométrique de raison k)

NB : ce résultat reste valable si on remplace l'hypothèse "f est contractante" par l'hypothèse "f est continue et il existe une itérée $f^m = f \circ \dots \circ f$ qui soit contractante"

Ex : Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Alors $(u_n)_n$ converge.

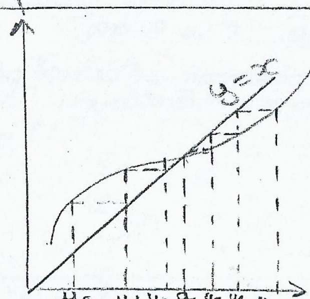
ⓑ cas où f est C^1 ou plus [Demailly]

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application de classe C^1. Soit $a \in I$ un point fixe de f. On peut distinguer 3 cas :

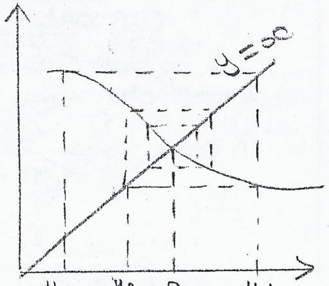
① $|f'(a)| < 1$. Alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$, $f(V) \subset V$ et f est k-contractante sur V, donc la suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a. On dit que a est attractif, on a une convergence géométrique de rapport $|f'(a)|$ si $|f'(a)| \neq 0$

cas particulier : $f'(a) = 0$ et $f \in C^2$ telle que $|f''| \leq M$ sur V. Alors $|u_n - a| \leq \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{1}{2}M|u_0 - a|\right)^{2n}$. On a une convergence quadratique

$f'(a) > 0$
$u_0 > a \Rightarrow (u_n)_n \searrow$
$u_0 < a \Rightarrow (u_n)_n \nearrow$
(cas des escaliers)

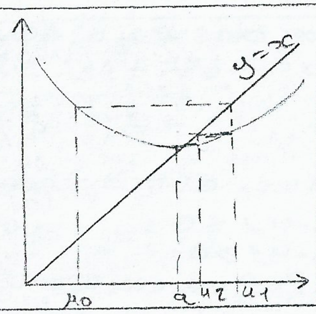


$f'(a) < 0$
$(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes et convergent vers a.
(colimaçon attractif)



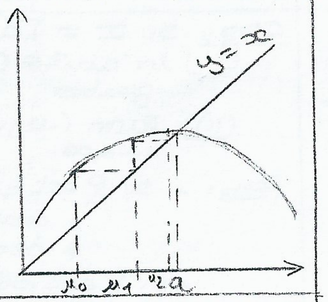
$\begin{cases} f'(a)=0 \\ f''(U)>0 \end{cases}$

$(u_n)_n \searrow$ sauf peut-être en u_0



$\begin{cases} f'(a)=0 \\ f''(U)<0 \end{cases}$

$(u_n)_n \nearrow$ sauf peut-être en u_0



② $|f'(a)|>1$, alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$, $\forall x \in V$, $|f(x)-a| > |x-a|$. On dit que a est répulsif. Cependant f^{-1} existe sur un voisinage de V et $f(a)=a \Leftrightarrow f^{-1}(a)=a$. a est alors un point fixe attractif de f^{-1}

③ $|f'(a)|=1$: c'est un cas douteux

Exemple 1 : $f(x)=\sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a $\sin x < x$, $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}]$. Pour tout $u_0 \in]0; \frac{\pi}{2}]$, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante minorée donc convergente vers ℓ, un point fixe de f, donc $\ell = 0$.

Exemple 2 : $f(x)=\operatorname{sh} x$, $x \in [0; +\infty[$. Or $\operatorname{sh} x > x$, $\forall x>0$, donc le point fixe 0 de f est répulsif et $\forall u_0>0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

ⓒ Orbites périodiques [Chambert-Loir]

Déf : soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est un point k-périodique de f si $f^{(k)}(a)=a$ et $f^{(p)}(a) \neq a$ $\forall p<k$. $(a, f(a), \dots, f^{k-1}(a))$ est appelé cycle d'ordre k de f. Le cycle est dit attractif (resp. répulsif) si a est attractif (resp. répulsif) pour f^k.

Thm de Sarkovskii : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Si f admet un point de période 3, alors f admet un point de période n, $\forall n \in \mathbb{N}$. [DUPT]

Exemple (suite logistique) : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \lambda x(1-x)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall \lambda \geq 4$, f a un point n-périodique.

II) SUITES RECURRENTES ET APPROXIMATION D'UN NOMBRE

2.1. Ecriture fractionnaire d'un nombre de développement décimal périodique. [De Biasi]

Si x est un nombre de développement décimal périodique, par exemple, $x = 0,1717\dots$, on s'intéresse à : $\begin{cases} x_n = x_{n-1} \cdot 10^{-2} \\ x_0 = 0,17. \end{cases}$

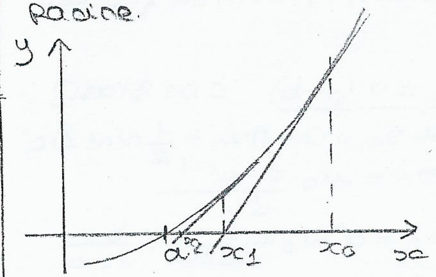
Alors $x = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{17}{99}$

2.2. Approximation de racines carrées

ⓐ Par la méthode de Newton

Présentation de la méthode de Newton : [Rouvière]

But : évaluer numériquement la racine d'une équation $f(x)=0$, en supposant qu'on dispose d'une valeur grossière x_0 de cette racine.



Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose $c<d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x)>0$ $\forall x \in [c, d]$. On s'intéresse à : $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Alors :

i) f a un unique zéro a.

ii) $\exists I = [a-\alpha, a+\alpha]$, $\alpha>0$ tq $\forall x_0 \in I$

$(x_n)_n$ a une convergence d'ordre 2 vers a.

De plus, si $f''(x)>0$ $\forall x \in [c, d]$, alors $\forall x_0 \in [a, d]$, $(x_n)_n$ décroît strictement vers a et $x_{n+1} - a \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$.

→ application : méthode de Héron : [De Biasi]

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ assez proche de $\sqrt{a}$. On définit : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, $a>0$. Alors $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{a}$ de façon quadratique et on a la majoration :

$$0 < u_n - a < 2a \left(\frac{u_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$$

Ex : $2,2360679791 < \sqrt{5} < 2,2360679779$

ⓑ Par le développement en fractions continues [Lambre].

Soit $x = \sqrt{2} - 1$. On définit deux suites $(a_n)_n$ et $(x_n)_n$ en posant $a_0 = [x]$, $x_0 = x - a_0$ et pour $n \geq 1$: $\begin{cases} a_n = x_n = 0 \text{ si } x_{n-1} = 0 \\ a_n = \left[\frac{1}{x_{n-1}}\right] \text{ et } x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_n \text{ sinon} \end{cases}$

On montre que : $a_0 = 0$, $x_0 = \sqrt{2} - 1$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2$ et $x_n = \sqrt{2} - 1$.

Posons $\alpha_n = [a_0, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$

On montre que $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha_n}$

On pose $u_n = 1 + \alpha_n$. On montre que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$, c'est-à-dire :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+}}$

III) ETUDE EN DIMENSION > 1

3.1. Rotation.

ad on parle de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ il faut faire le lien.

Une étudiante, possédant un téléphone mobile, souhaite étudier l'évolution de ses consommations ; la probabilité qu'elle dépasse son forfait le 1er mois est 0,5. On note E_n (p_n q_n) l'état probabiliste du $n^{ième}$ mois avec p_n la probabilité que l'étudiante dépasse son forfait le $n^{ième}$ mois et q_n la probabilité contraire. On donne la matrice de transition de l'état E_n à l'état E_{n+1} : $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Question : vers quel état tend E_n quand $n \to +\infty$?

3.2. Résolution de $U_{n+1} = AU_n$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ [Gosbiaux]

On définit simultanément p suites à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par la donnée de leur premier terme et les relations suivantes.
On note $u^{(1)}, \dots, u^{(p)}$ les suites, $u_n^{(k)}$ sera le terme d'indice n de la $k^{ième}$ suite, et on a :

$$\begin{cases} u_{n+1}^{(1)} = \alpha_{11} u_n^{(1)} + \dots + \alpha_{1p} u_n^{(p)} \\ \vdots \\ u_{n+1}^{(p)} = \alpha_{p1} u_n^{(1)} + \dots + \alpha_{pp} u_n^{(p)} \end{cases}$$

En notant $A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix}$, on obtient $U_{n+1} = AU_n$.
d'où $U_n = A^n U_0$.

L'étude de ces suites se ramène donc à celle des puissances d'une matrice, ce qui se traite en diagonalisant, ou en jordanisant ou en divisant X^n par un polynôme annulant A.

Réponse à la question précédente : on a $E_{n+1} = E_n M$ donc $E_n = E_0 M^n$
on montre que $E_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$.

3.3. Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre p

Thm : Les suites u dont le terme général vérifie une relation de récurrence linéaire : $u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n$ forment un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$. Si l'équation caractéristique $\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - \dots - a_0 = 0$ admet ses p racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$, une base de cet espace vectoriel est formée des suites de termes généraux $n^j (\lambda_i)^n$ où pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $j \in \{0, 1, \dots, \alpha_i - 1\}$ où α_i = multiplicité de λ_i

Ex (suite de Fibonacci) : cette suite $(F_n)_n$ est définie par :
$F_1 = F_2 = 1$ et pour $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On montre que $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$.

NB : $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

IV) RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

But : étant donné une matrice inversible A et un vecteur b, on souhaite résoudre le système linéaire $AU = b$.

4.1. Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel [Ciarlet]

Méthode : on se donne un vecteur initial u_0 arbitraire et on définit la suite de vecteurs $(u_k)_{k \geq 0}$ par : $u_{k+1} = Bu_k + c$ où B et c sont construits à partir de A et b.
On dit que la méthode est convergente si $\lim_{k \to \infty} u_k = u$

Thm : Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) La méthode est convergente
(ii) $\rho(B) < 1$ (où $\rho(B) := \max_{\lambda \in Sp(B)} |\lambda|$)
(iii) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|\cdot\|$

On décompose A sous la forme $A = M - N$ où M est "facilement inversible". On a alors : $Au = b \Leftrightarrow u = \underbrace{M^{-1}N}_{B} u + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$, $A = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$
On a les 2 méthodes suivantes :

Méthode	décomposition $A = M - N$	matrice $M^{-1}N$ de la méthode	description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D-E) - F$	$J = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$

4.2. Méthode du gradient à pas optimal [Hiriart-Urruty]

On cherche la solution du problème de minimisation :
déterminer $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(u) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$
où $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$ où $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Soit l'algorithme :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$$

où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est l'unique réel positif minimisant $t \mapsto f(x_k + t d_k)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $c = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ le conditionnement de A. Alors l'algorithme converge rapidement si c est proche de 1, lentement sinon, vers le minimum de f, noté $\bar{x}$. [OUPT]

Ajouts possibles : • suite homographiques