224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

Références : GOURDON Analyse (G)
HAUCHECORNE (H)
BARANGER Introduction à l'analyse numérique (Ba)
DEMAILLY (D)
ZUILY - QUEFFELEC (ZQ)
Oraux X-ENS Analyse 2 (X-ENS 2)
LESIGNE Pile ou face (L)

I - Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Déf 1 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$. (G) p. 191
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Déf 2 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$
(G) p. 192

Prop 3 : Dans ce cas, (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.
(G) p. 192

Ex 4 : L'étude de la suite arithmético-géométrique :
$0 < v_0 < u_0$, pour $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$
(u_n) décroissante, (v_n) croissante, les deux suites sont adjacentes.
(G) p. 198

Thm 5 : Thm de Bolzano-Weierstrass
De toute suite bornée de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous suite convergente.
(G) p. 28

Déf 6 : Relations de comparaison (u_n) et (v_n) suites de $\mathbb{K}$.
- $u_n \sim v_n$ si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et v_n ne s'annule pas.
- $u_n = o(v_n)$ si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et v_n ne s'annule pas.
- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = c \in \mathbb{K}$ et v_n ne s'annule pas.
(G) p. 86

Thm 7 : Thm de Cesaro (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ qui tend vers l. On pose :
$\forall n \geq 1$, $b_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$, alors $b_n \to l$. (G) p. 195

Contre-ex 8 : Si $u_n = (-1)^n$, alors $b_n \to 0$ et pourtant (u_n) diverge.
(H) p. 104

2) Résultats sur les séries

Thm 9 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
i) Si $v_n = \mathcal{O}(u_n)$ et $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
ii) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
(G) p. 200

Contre-ex 10 : Il est important de supposer les séries à termes ≥ 0 :
$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ alors $u_n \sim v_n$
(H) p. 114
et pourtant $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.

3) Une méthode d'accélération

Prop 11 : Méthode Δ^2 d'Aitken. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ L-Lipschitzienne $(L<1)$
C^1 telle que f' soit de signe constant sur $[a,b]$.
Soit $\bar{x}$ l'unique solution sur $[a,b]$ de $x = f(x)$. On veut approcher $\bar{x}$. On prend $x_0 \in [a,b]$ et $\forall n \geq 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
Alors $x_n \to \bar{x}$ et on a : $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$.
On peut accélérer cette convergence en posant :

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$
$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$
$$x_n' = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

Posons $e_n = x_n - \bar{x}$.
Si on a $e_{n+1} = (f'(\bar{x}) + \varepsilon_n)e_n$ où $e_n \neq 0$ et $\varepsilon_n \to 0$
et $|f'(\bar{x})| < 1$
Alors $\frac{x_n' - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
(Ba) p. 22

II - Suites récurrentes

1) Cas général

Prop 12 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$.
On définit la suite récurrente (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \geq 1 \end{cases}$

- Si f est croissante, (u_n) est monotone et le sens de monotonie donné par le signe de $u_1 - u_0$.
- Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et leur sens de monotonie est opposé. (G) p. 192

Ex 13 : Suites arithmétiques

$a \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} u_{m+1} = u_m + a & \forall m \geq 1 \\ u_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$, alors $\forall m \geq 0$, $u_m = u_0 + ma$
[G] p.193

Ex 14 : Suites géométriques

$q \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} u_{m+1} = q u_m & \forall m \geq 1 \\ u_0 \in \mathbb{C} \end{cases}$, alors $\forall m \geq 0$, $u_m = u_0 q^n$.
[G] p.193

Ex 15 : Suites sous-additives

Soit (u_m) une suite réelle qui vérifie $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ $\forall n, m$,
Alors $\left(\frac{u_m}{n}\right) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \inf_{m \geq 1} \frac{u_m}{m} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ [FGN A1] p.58

2) Suites homographiques

Déf 16 : $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence homographique si $\exists a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ tels que $u_{m+1} = \frac{a u_m + b}{c u_m + d}$ $\forall m \geq 1$.

Une telle suite est définie pour tout n si aucune de ses valeurs n'annule $c u_m + d$. [G] p.193

Prop 17 : Soit (u_m) une suite homographique. On considère l'équation
$\frac{ax+b}{cx+d} = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0$ (E)

i) Si (E) admet deux racines distinctes α et β, on a :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{u_m - \alpha}{u_m - \beta} = k^m \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$

ii) Si (E) admet une racine double α, alors :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_m - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + k m$ où $k = \frac{c}{a - \alpha c}$ [G] p.193

3) Récurrence linéaires à coefficients constants

Déf 18 : $(u_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire homogène à coefficients constants d'ordre k si $\exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tels que $\forall m \geq k$, $u_m = a_1 u_{m-1} + \dots + a_k u_{m-k}$ [G] p.193

Prop 19 : Soient $\pi_1, \dots, \pi_q$ les racines de $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leurs ordres de multiplicité. Alors l'ensemble des suites (u_m) vérifiant la relation précédente s'écrit :
$u_m = P_1(m) \pi_1^n + \dots + P_q(m) \pi_q^n$ où $\forall i$, P_i est un polynôme de degré $< \alpha_i$. [G] p.194

4) Formule d'Euler Mac Laurin et développements asymptotiques.

Prop 20 : Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $f : [m, n] \to \mathbb{C}$ de classe C^r. Alors :
[G] p.301

$$f(m) + f(m+1) + \dots + f(n) = \int_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(m) + f(n))$$
$$+ \sum_{k=2}^{r} \frac{b_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n B_r(t) f^{(r)}(t)\,dt$$

Déf 21 : On définit les polynômes de Bernoulli par récurrence par :
$$\begin{cases} B_1(x) = x - \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[\\ B_p'(x) = p B_{p-1}(x) & \text{sur } [0,1[\text{ pour } p \geq 2 \\ \int_0^1 B_p(x)\,dx = 0 & \\ B_p \text{ périodique de période 1 sur } \mathbb{R} & \end{cases}$$
[G] p.301

ce qui donne $B_p(x) = -p! \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi n x}}{(2i\pi n)^p}$.

et $\forall k \geq 0$, $b_k = B_k(0)$.

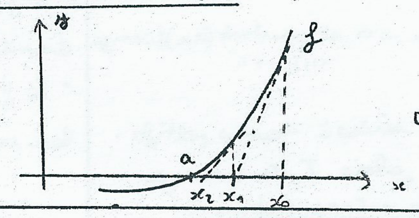
Appli 22 : On peut calculer le développement asymptotique de $\sum \frac{1}{m}$:

$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est la constante d'Euler.
[G] p.301

III - Applications.

1) Méthodes de Newton et de la sécante.

Méthode 23 :
Si x_0 donné, on pose
$x_{m+1} = F(x_m)$ où
$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$



[D] p.100

* Pour trouver un équivalent de (u_m) on regarde pour quel α $u_{m+1}^{\alpha} - u_m^{\alpha}$ a une limite

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{N} U_{m+1}^{\alpha} - U_m^{\alpha}}_{= \ell + o(1/N)} = U_{N+1}^{\alpha} - U_0^{\alpha}$$
↓
Voilà !

DVP

Thm 24 : [Méthode de Newton] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$. On suppose $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et $f'(x)>0$ pour tout $x \in [c,d]$. Alors :

1) f a un unique zéro a et : $\forall x \in [c,d]$, $\exists z \in]a,x[$ tq $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}(x-a)^2$

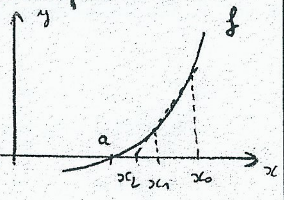
2) $\exists c>0$ tq $|F(x)-a| \leq c\,|x-a|^2$, $\forall x \in [c,d]$ et tq $\exists \alpha>0$, $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F. $\forall x_0 \in I$, (x_n) a une convergence d'ordre 2 vers $a \in I$.

3) Si $f''>0$, alors 2) est valable pour $I = [a,d]$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ $(x_0 > a)$ [Rou]

Méthode 25 : On approche la tangente en x_n par le taux d'accroissement : $\tau_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ et on pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n}.$$

(D) p. 102



Thm 26 : Méthode de la sécante.

Soit $f \in \mathcal{C}^2$ tel que $f' \neq 0$ sur $I = [a-r, a+r]$.

Posons $M_i = \max_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$ pour $i = 1,2$

$m_i = \min_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$ pour $i = 1,2$

$K = \dfrac{M_2}{2m_1}\left(1 + \dfrac{M_1}{m_1}\right)$ et $h = \min\left(r ; \dfrac{1}{K}\right)$ (D) p. 103

Posons (S_p) la suite de Fibonacci telle que $S_0 = S_1 = 1$.

Alors $\forall x_0, x_1 \in [a-h, a+h]$ distincts, on a :

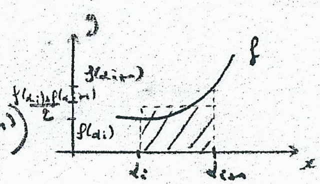
$$|x_p - a| \leq \frac{1}{K}\left(K \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)\right)^{S_p}.$$

2) Intégration numérique.

Méthode 27 : Méthode des trapèzes

On approche l'intégrale de f par :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\left(\frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2}\right)$$ (D)



Méthode 28 : Extrapolation de Richardson

On calcule la limite de $A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + O(t^{k+1})$ en $t=0$ en posant : $A_{m,0} = A(r^{-m} t_0)$

$$A_{m,n} = \frac{r^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{r^n - 1}$$ (D) p. 84

Méthode 29 : Méthode de Romberg. Il s'agit d'accélérer la méthode des trapèzes grâce à la méthode de Richardson. (D) p. 85

$A_{m,0} = h\left(\frac{1}{2}f(\alpha) + f(\alpha+h) + \dots + f(\beta - h) + \frac{1}{2}f(\beta)\right)$ où $h = \frac{\beta-\alpha}{2^m}$

$$A_{m,n} = \frac{4^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{4^n - 1}.$$

3) Suites équidistribuées.

Prop 30 [Critère de Weyl] Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Soient $0 \leq a \leq b \leq 1$. On pose $X_n = \mathrm{Card}\{k \in [\![1;n]\!],\ u_k \in [a,b]\}$. On a équivalence entre :

i) $\forall (a,b)$, $\dfrac{X_n(a,b)}{n} \to b-a$

ii) $\forall f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(x)\,dx$

iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{2i\pi p u_i} = 0$ (X-ENS 2)

DVP

4) Probabilités

Thm 31 : [Th central limite] (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, L^2, d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$.

Posons $S_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$ [ ] p. 540

Prop 32 : Estimation des grands écarts

Soit $p \in [0,1]$. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$, et on pose $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ et $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1-p[$ et on pose :

$$h_+(\varepsilon) = (p+\varepsilon)\ln\left(\frac{p+\varepsilon}{p}\right) + (1-p-\varepsilon)\ln\left(\frac{1-p-\varepsilon}{1-p}\right)$$

Alors : i) $h_+(\varepsilon) > 0$

ii) $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(\varepsilon)}$

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right)\right) = -h_+(\varepsilon)$ [L] p. 16