223 : Convergence des suites numériques. Exemples et applications

I Généralités sur l'étude de la convergence des suites réelles

I 1) Définition de la convergence et premières propriétés

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
Dans ce cas il existe une seule valeur l vérifiant cette propriété et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si elle n'est pas convergente. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N,\ u_n \geq A$. ([GOU] p 191) ([GOU] p 225)

Exemple : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$. **Application** : Théorème central limite en probabilités. ([OUV] p 323)

Théorème (d'encadrement) : ([GOU] p 192)
Si trois suites (u_n), (v_n), (w_n) vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (w_n) et (v_n) convergent vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Exemples : Étude des suites ([MER] p 78)
$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$; $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$; $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

I 2) Théorèmes généraux de convergence

Théorème : Soit (x_n) une suite croissante de nombres réels (resp décroissante) alors la suite est convergente si et seulement si elle est majorée (resp minorée). ([MON] p 151)

Exemple : $0 < u_0 < u_1$ et $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$ $(0 < a < 1)$ ([MER] p 78)

Corollaire : Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels vérifiant ([MON] p 151)
(i) (a_n) est croissante et (b_n) décroissante
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
(iii) $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$
Alors les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite l qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$. On dit que deux telles suites sont adjacentes.

Application : • Convergence des séries alternées : ([MON] p 165)
Soit (a_n) une suite de nombres réels, décroissante, de limite 0, alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
• Méthode de dichotomie

Théorème : (u_n) converge $\Leftrightarrow$ $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge ([MER] p 75)

Exemples : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ ([MER] p 75) ; Formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ ([GOU] p 211)

Théorème : (critère de Cauchy) ([GOU] p 192)
Toute suite réelle est convergente si et seulement si elle vérifie le critère suivant appelé critère de Cauchy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall q \geq N$, $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Exemple : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge ([MON] p 152)

I 3) Théorème plus spécifique de convergence

Théorème (Sommes de Riemann) : ([MER] p 76)
Soit f une fonction continue. Alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

Exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ ([MER] p 78)

Lemme de Kronecker : Soit (x_n) une suite réelle et (b_n) une suite croissante de réels qui tend vers $+\infty$. Si la série de terme général x_n converge alors $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. ([OUV] p 105)

Application : une démonstration de la loi des grands nombres en Probabilités. ([OUV] p 112)

(*) oublié (cf à la fin)

I-4) Suites extraites, valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

Définition : On dit que a est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si a est limite d'une sous suite de la suite (x_n) (suite réelle ou complexe) ([MON] p 107)

Proposition : Toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence (sa limite)

Exemple : • u_n converge vers l si et seulement si u_{2n} et u_{2n+1} converge vers l
• la suite $u_n = \left(\frac{1}{1 + n|\sin(\frac{n\pi}{2})|}\right)$ diverge

Théorème (de Bolzano Weierstrass) :
De toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente (ie toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence)

Application : Étude de (u_n) où (u_n) est bornée et telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2}$ converge ([FGN 1] p 76)

Théorème : Soit (x_n) une suite numérique. On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite. Alors $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ où $A_n = \{x_k, k \geq n\}$, c'est donc un fermé dans $\mathbb{R}$. ([MON] p 152)

Exemples : L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = \sin n$ est $[-1, 1]$ ([GOU] p 157)

Lemme : Si (x_n) est une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ alors l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est soit vide soit un intervalle. ([ROM] p 206)

Application : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Alors la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ ([FGN 1] p 86)

Définition : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle limite supérieure (resp inférieure) que l'on note $\overline{\lim}\, x_n$ (resp $\underline{\lim}\, x_n$), de la suite (x_n), l'élément de $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (resp $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$) défini par $\inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$ (resp $\sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$). ([ZQ] p6)

Exemple : le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ ([MON] p 305) donc pour $a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ on obtient rapidement que $R = 1/e$ ([MIA] p81)

Applications de lim sup et lim inf

- Etude de la suite $u_n = \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k^n$ ([FGN1] p82)
- Suite sous-additives

Proposition : Soit $u=(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tout couple (m,n) d'entiers naturels. Alors $\frac{u_n}{n}$ tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^+$. ([ZQ] p5)

Remarque : On peut par exemple utiliser ce résultat pour montrer la convergence de la suite $\|A^n\|^{1/n}$ où $A \in M_n(\mathbb{C})$ et où $\|\ \|$ désigne une norme matricielle.

II Etude du comportement asymptotique

II.1) Théorème généraux sur la détermination d'équivalent

Exemples :
- $u_1 = 1$, $\forall n\geq 2$, $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ ([GOU] p 200)
- $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$ $(\alpha>1)$ ([MER] p 89)

Théorème (de Cesàro) : ([MER] p89)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ tende vers $+\infty$. Pour toute suite (u_n) donnée, on définie la moyenne de Cesàro de (u_n) pondérée par (a_n) comme : $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$. Alors si (u_n) converge vers l, on a (v_n) qui converge aussi vers l.

Réciproque fausse : contre exemple $u_n = (-1)^n$.

Exemples d'application : ([FGN1] p 99, 100)

- $\begin{cases} u_0 \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$
- $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$
- $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$
- $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ([MER] p 90)
- $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ [LS3] p66

Conséquence : Corollaire : ([MER] p 89)
Soit (u_n) une suite sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où on suppose que
(i) tous les termes de u sont strictement positifs
(ii) u converge vers 0
(iii) il existe $\alpha>0$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - b x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$
alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{b\alpha n}\right)^{1/\alpha}$

Théorème (de sommation des équivalents) : ([GOU] p 202)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors
(i) Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge et les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$
(ii) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et les sommes partielles vérifient $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$

Application : Développements asymptotiques

- de suites récurrentes :
  - $\begin{cases} u_0 \in]0,\pi/2] \\ u_{n+1} = \sin u_n \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ ([GOU] p118)
  - $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \end{cases}$ $u_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ ([FGN1] p102)
- de série : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ([FGN1] p 159)

II.2 Un théorème taubérien ([ZQ] p6)

Théorème : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs, $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, $\alpha\in]0,1[$ et $c>0$. On a équivalence entre :
(i) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c\, n^{-\alpha}$
(ii) $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c\, \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

II.3 La formule d'Euler-McLaurin ([MON] p 249)

Lemme : Il existe une unique famille de polynômes $B_n(X)$ (de Bernoulli) dans $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations :
(i) $B_0(X) = 1$, $B_1(X) = X - 1/2$
(ii) $B_n'(X) = n B_{n-1}(X)$ pour $n\geq 1$
(iii) $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$ pour $n \geq 1$.

Théorème : (Formule d'Euler-McLaurin)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$. Alors $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \sum_{k=1}^{n}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right)\frac{B_{2k}(1)}{2k!} - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)\, B_{2n+1}(t)\,dt$

Application : $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}(1)}{2k\, n^{2k}} + O\left(\frac{1}{n^{2n+2}}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$

III Applications

III.1 Résolution d'équation $f(x)=0$

Théorème : (Point fixe de Banach Picard) ([MIA] p322)
Soit $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$. On suppose f k contractante, alors f admet un unique point fixe noté r sur $[a,b]$. De plus la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers r, quelque soit le choix de x_0 dans $[a,b]$ et on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$.

Théorème : (Méthode de Newton) ([ROM] p 276)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a<b$ réels. Supposons que $f(a)f(b) < 0$ et $f'(x) f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Dans ces conditions, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]a,b[$ pour tout x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x_0) f''(x_0) > 0$, on a la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ qui est monotone et qui converge vers α, et on a $|x_n - \alpha| \leq (b-a)\left(\frac{b-a}{2}\frac{M_2}{m_1}\right)^{2^n-1}$ où $m_1 = \inf_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup |f''(x)|$, $x\in[a,b]$.

III.2 Equirépartition ([FGN 2] p 47)

Théorème : (Critère de Weyl) $\boxed{\text{Développement}}$

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a,b) = \operatorname{Card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in [a,b]\}$. Alors on a équivalence entre

(i) $\frac{X_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout couple (a,b).

(ii) pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$.

IV Méthode d'accélération de la convergence

IV-1 Vitesse de convergence ([ROM] p 279, 282)

Définitions : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \neq \alpha$. Si la suite $\left(\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite λ, on dit que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α est :

- lente, pour $\lambda = 1$
- géométrique de rapport λ, pour $\lambda \in]0,1[$
- rapide pour $\lambda = 0$

On dit que la convergence de la suite (x_n) vers α est d'ordre $r \geq 1$ s'il existe une constante $\lambda > 0$, telle que $|x_{n+1}-\alpha| \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\,|x_n-\alpha|^r$

Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergente vers α avec $y_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la convergence de cette suite vers α est plus rapide que celle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $|y_n - \alpha| = o(|x_n-\alpha|)$ à l'infini.

Exemples :

- Soit $\gamma > 1$. On note $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\gamma}$. La suite $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\gamma}$ converge lentement vers α.
- La convergence de la méthode de Newton (dans le cas où le terme initial est suffisamment proche de la solution α de sorte que la suite soit bien définie et convergente vers α) est de convergence rapide, d'ordre 2.
- La suite $y_n = x_n + \frac{1}{\gamma-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\gamma-1}}$ converge vers α plus rapidement que la suite (x_n) définie ci-haut.

IV-2 Accélération de convergence ([ROM] p 282)

Principe : construire, à partir d'une suite qui converge, une autre suite qui converge plus vite vers la même limite.

Intérêt : diminuer les temps de calcul et les erreurs d'arrondis.

Proposition : ([ROM] p 282) (Méthode de Richardson)

Soit (x_n) une suite dont on dispose d'un développement asymptotique de la forme $x_n = \alpha + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n)$ avec β, γ non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. ($x_n \neq \alpha\ \forall n$)
(la suite (x_n) converge vers α et la convergence est géométrique de rapport $|\lambda|$).

- Si on connait explicitement les coefficients β et λ, on peut accélérer la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la remplaçant par la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = x_n - \beta\lambda^n$. Cette suite converge bien vers α et avec $y_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma\mu^n$, la convergence est donc géométrique de rapport $|\mu|$ et $\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est à dire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α plus vite que la suite (x_n).
- Si on connaît explicitement le coefficient λ, mais pas le coefficient β, on introduit la suite $y_n = \frac{x_{n+1} - \lambda x_n}{1-\lambda}$, on a alors $y_n - \alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\gamma\mu^n$ et $\frac{y_n-\alpha}{x_n-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda}\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, c'est à dire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α plus vite que la suite (x_n).

Exemple :

Approximation de π par la méthode d'Archimède des polygones réguliers.
Cette méthode consiste à introduire la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $x_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
On en déduit que : $x_{n+1} = \sqrt{2}\, 2^n \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x_n}{2^n}\right)^2}}$ ce qui permet un calcul itératif des éléments de cette suite sans utiliser π que l'on veut approcher.
On a $x_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{\pi^5}{5!}\frac{1}{2^{4n}} + o\left(\frac{1}{2^{4n}}\right)$ avec $\beta = -\frac{\pi^3}{3!}$ et $\gamma = \frac{\pi^5}{5!}$ qui sont inconnus (car on cherche à approcher π) et $\lambda = 1/4$, $\mu = \frac{1}{16}$. La convergence de cette suite vers π est géométrique de raison $1/4$ et on l'accélère en une suite qui converge géométriquement avec la raison $1/16$ en posant $y_n = \frac{4x_{n+1} - x_n}{3}$.

Application : Intégration numérique : Accélération de la méthode des trapèzes, qui donne la méthode de Simpson ([MIA] p 339)

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$. La formule des trapèzes est donnée par :
$T_n = \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) + \frac{f(b)}{2}\right)$. Grâce à la méthode d'Euler-Maclaurin, I étant l'intégrale de f sur $[a,b]$, on sait qu'il existe une suite réelle (c_m), dont la définition est liée aux nombres de Bernoulli et aux valeurs numériques des dérivées de f en a et b, telle que pour tout m : $T_n = I + \sum\limits_{k=1}^{m} c_k n^{-2k} + o(n^{-2m})$. On pose $x_n = T_{2^n}$
$x_n = I + \sum\limits_{k=1}^{m} c_k 4^{-kn} + o(4^{-mn})$. On accélère la convergence avec $y_n = \frac{4x_n - x_{n-1}}{3}$.

Remarque : on peut réitérer le procédé, ce qui donne la méthode de Romberg.

(*) **Théorème :** (Taubérien de Hardy-Littlewood) ([GOU] p 289)
Si (b_n) est une suite réelle vérifiant $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \ell$ alors la série $\sum b_n$ converge et sa somme vaut ℓ.

Remarque : Si $b_n = (-1)^n$ on a $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim\limits_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ et $\left(\sum (-1)^n\right)$ diverge.