221 Equations différentielles linéaires - Systèmes Différentiels linéaires - Exemples et Applications

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension $n \geq 1$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I) Etude théorique

Déf 1: Aux applications C^0, $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$, on associe l'équation différentielle, dite linéaire du premier ordre, $(L) : x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et l'équation homogène $(H) : x' = a(t) \cdot x$.

Une solution de (L) est une application dérivable $f : I \to E$ telle que : $\forall t \in I,\ f'(t) = a(t) \cdot f(t) + b(t)$.

Th. de Cauchy-Lipschitz linéaire: Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation (L) admet une unique solution f sur I vérifiant $f(t_0) = x_0$. On dit qu'il y a unicité au problème de Cauchy en (t_0, x_0).

Structure de l'ensemble des solutions: $\to$ L'ensemble $S(H)$ des solutions de (H) un ss-eV de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E de dim n.

$\to$ L'ensemble $S(L)$ des solutions de (L) est un ss-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, de direction $S(H)$.

Déf 2: Soit $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$ un système de n éléments de $\mathcal{C}^1(I, E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. $\forall t \in I$, $W(t) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(h_1(t), \dots, h_n(t))$ est appelé matrice wronskienne en t du système $\mathcal{H}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. Le déterminant $w(t) = \det W(t)$ est le wronskien en t du système $\mathcal{H}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Prop 3: Soit $\mathcal{H} = (h_1, \dots, h_n)$ un système fondamental de (H).
$\forall f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, $\exists !\ u_1, \dots, u_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ tel que
$f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$

Thm 4: $(y_1, \dots, y_n)$ base de soluti° de $(H) \iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0 \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0$

Méthode de Variation des constantes: (sert à trouver une solution particulière)

$\to$ L'application $f = u_1 h_1 + \dots + u_n h_n$ est solution de (L)
$\iff u_1' h_1 + \dots + u_n' h_n = b$ (Par intégration, on trouve les u_i)

Déf 5: (Système différentiel) : Il s'agit de l'écriture matricielle de (L). Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\forall t \in I$, on pose $A(t)$ et $B(t)$ les matrices de $a(t)$ et $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle alors système différentiel l'équation différentielle $X' = A(t) X + B(t)$.

II) Systèmes différentielles à coefficients constants

$y'(t) = A y(t) + B(t)$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constante.

1) Equation homogène : $y'(t) = A y(t)$

Les fonctions de la forme $y : t \mapsto e^{\lambda t} x$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^n$ sont solutions ssi $Ax = \lambda x$.

$\to$ Si A est diagonalisable : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres de A associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On obtient n solutions linéairement indépendantes $y_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} x_i$ et les solutions de (H) sont les combinaisons linéaires des y_i.

$\to$ Si A n'est pas diagonalisable : On a besoin des exponentielles de matrices.

Déf 6: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\boxed{e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n}$.

$\hookrightarrow$ Cette définition est licite, car la série est Absolument CV.
En effet, $\left|\left|\left| \frac{1}{n!} A^n \right|\right|\right| \leq \frac{1}{n!} |||A|||^n$ avec $|||\cdot||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Et donc on a même $|||e^A||| \leq e^{|||A|||}$.

Prop 7: Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

$\to$ Pour calculer e^A, on peut mettre A sous forme de Jordan, puis s'intéresser au calcul d'exponentielle de matrice triangulaire à l'aide de la décomposition de Dunford.

Th 8 : La solution y de (H) telle que $y(t_0) = y_0$ est donnée par

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

NB : Il s'agit d'une méthode un peu lourde. Sur $\mathbb{C}$, comme le polynôme caractéristique est scindé, $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire. On pose $Z = P^{-1}X$ et on résoud le système $Z' = TZ$ en partant de la dernière ligne.

2) Equation avec 2nd membre : $y'(t) = A\,y(t) + B(t)$

La méthode de variation des constantes permet d'obtenir une solution particulière et on obtient alors comme solution générale de (E) tel que $y(t_0) = y_0$

$$y : t \mapsto \exp((t-t_0)A)\cdot y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)A)\,B(s)\,ds$$

Application 9 : On peut déterminer la trajectoire d'une particule de masse m, de charge électrique q, se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, et d'un champ magnétique $\vec{B}$, uniformes et constants. $\vec{F} = m\vec{\gamma} = q\vec{v}\wedge\vec{B} + q\vec{E}$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}}_{A} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{E}}_{B}$$

On obtient alors un mouvement hélicoïdal.

3) Equation linéaire d'ordre p à coefficients constants

Equation sans 2nd membre : $a_p y^{(p)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C})$

On se ramène à l'étude de $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_p} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{p-1}}{a_p} \end{pmatrix}$$

Th 10 : L'ensemble des solutions est un $\mathbb{K}$-eV de dimension n.

Th 11 : Les fonctions $y : t \mapsto e^{\lambda t}$ sont solutions ssi λ est racine du polynôme caractéristique $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Th 12 : Si P a pour racines complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $\mu_1, \dots, \mu_r$, l'ensemble des solutions est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ayant pour base les fonctions :

$t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$, $i \in [\![1, r]\!]$, $k \in [\![1, \mu_i - 1]\!]$.

Equation avec 2nd membre : On obtient une solution particulière avec la méthode de variation des constantes.

Ex : (E) $y'' + 4y = \tan t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\hookrightarrow y(t) = \frac{-t}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\,\ln(\cos t) + \alpha_1 \cos 2t + \alpha_2 \sin 2t$$

III) Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables

1) Résolvante d'un système linéaire

(H) $Y'(t) = A(t)Y$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de (H).

Prop 13 : $\forall t_0 \in I$, $\Phi_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^n$, $Y \to Y(t_0)$ est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire.

Déf 14 : Soit $(t, t_0) \in I^2$, on appelle résolvante de (H) l'isomorphisme $R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, de sorte que la solution de (H) vérifiant $y(t_0) = y_0$ est $y : t \mapsto R(t, t_0)\,y_0$.

Prop 15 : (i) $\forall t \in I$, $R(t,t) = I_n$ (ii) $\forall (t_0, t_1, t_2) \in I^3$, $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$

(iii) $R(t, t_0)$ est solution de $\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$ avec $M(t_0) = I_n$

Avec la méthode de variation des constantes, on déduit la solution de (E) telle que $y(t_0) = y_0$: $y : t \mapsto R(t, t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)\,B(s)\,ds$

Prop 16 : $W(t) = \det R(t, t_0) \cdot \det(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right) \times \det(y_1(t_0) - y_n(t_0))$

$\to$ On peut donc calculer le déterminant de la résolvante, même lorsque la résolvante n'est pas connue.

2) Résolution à l'aide de séries entières

Prop 17 : Soit l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$, où a, b sont DSE sur $]t_0 - R, t_0 + R[$ ($t_0 \in I$, $R > 0$). Alors, toute solution de l'équation est DSE.

Ex 18 : Equation d'Airy : $y''(t) - ty = 0$

Ex 19 : A partir de $a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$, on recherche l'équation diff. dont $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est solution pour en déduire la limite des $\frac{a_n}{n^2}$. $\boxed{\text{DVPMT}}$

IV) Etude qualitative des solutions

1) Stabilité des solutions

Déf 20 : (i) $t \mapsto y(t,x)$ est stable s'il existe $\bar{B}(x_0,r)$ et $C > 0$ tq $\forall x \in \bar{B}(x_0,r)$, $\forall t \geq t_0$, $\|y(t,x) - y(t,x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$

(ii) $t \mapsto y(t,x)$ est asymptotiquement stable s'il existe $\bar{B}(x_0,r)$ et $\gamma \in C^0([t_0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ avec $\gamma(t) \to 0$ tq $\forall x \in \bar{B}(x_0,r)$, $\forall t \geq t_0$, $\|y(t,x) - y(t,x_0)\| \leq \gamma(t)\|x - x_0\|$.

$\boxed{\text{DVPMT}}$

Th de Liapunov : Soit le système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si $\mathrm{Re}(\mathrm{Sp}(Df(0))) < 0$), alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : Pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

2) Cas constant en dimension 2

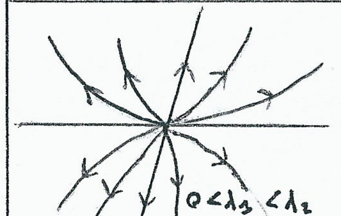
On considère le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$. On cherche à connaître l'allure des courbes intégrales au voisinage de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

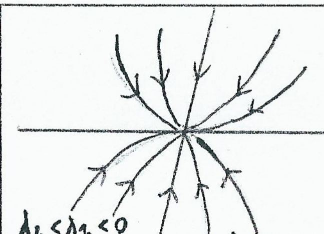
- Si $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, les courbes sont tangentes au vecteur $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ au voisinage de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. On parle de point régulier.
- Si $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est dit singulier.

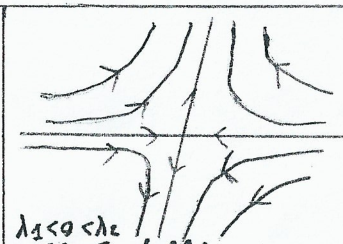
Etude des points singuliers : on suppose dét $A \neq 0$, de sorte que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul point singulier.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A.

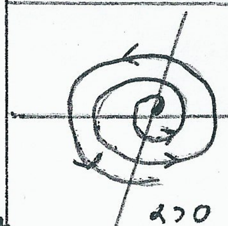
→ Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

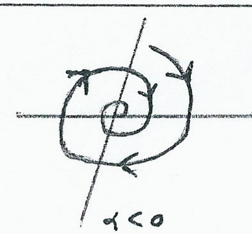

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
noeud impropre instable

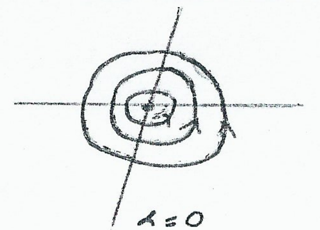

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
noeud impropre stable


$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Col (Instable)

→ Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$


$\alpha > 0$
Foyer Instable


$\alpha < 0$
Foyer Stable


$\alpha = 0$
Centre

Références : [Demailly] : Analyse Numérique et Equations Différentielles

[Chatterji] : Cours d'Analyse 3 : Eq. diff. ordinaires et aux dérivées partielles

[Gourdon] : Analyse