

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$

Exemples d'études qualitatives de solutions.

Thm 7: Thm de Cauchy-Lipschitz. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue et localement Lipschitzienne en la variable d'espace. Alors le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale. (C) p 149

Ex 8: Pour $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, on a existence et unicité de la solution maximale.

2) Quelques outils d'étude de solutions.

Prop 9: Lemme de Gronwall Soient α, β et γ trois fonctions réelles continues sur $(a, b) \subset \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$ et $\beta \geq 0$ sur (a, b) .

On suppose que: $\forall t \in (a, b), \gamma'(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \gamma(s) ds$.

Alors $\forall t \in (a, b), \gamma(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \exp(\int_a^s \beta(u) du) ds$.

Thm 11: Thm de Rolle de tout compact. Soit $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution de (P), où $J =]a, b[$, $a < a < b < b$.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et un compact $K_0 \subset I$ tels que $\forall t \in]a, b[$ (resp $t \in J$, $\alpha \in S$), $f(t) \in K_0$, alors γ peut être prolongé au-delà de β (resp de α) en une solution de (P). (C) p 152

Prop 12: Si $f: J \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, alors si f vérifie de plus la condition 1 ou la condition 2, une solution maximale du problème de Cauchy (P) est globale.

1) Il existe $k: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit Lipschitzienne de rapport $k(t)$.

2) Il existe des fonctions c et $d: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues telles que l'application $y \mapsto f(t, y)$ satisfasse une inégalité de type:

$$\|f(t, y)\| \leq c(t) + d(t) \|y\| \quad (C) \text{ p 144}$$

Ex 13: Si $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est C^1 et bornée, on a existence globale de la solution. Par exemple, $f(x, y) = -y \sin y$ a une sol. globale.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives de solutions.

I - Théorie des équations différentielles

1) Étude de l'existence et de l'unicité des solutions.

Soient M un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue.

Dans la suite, on considèrera le problème de Cauchy:

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ où } y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ et } t_0 \in \mathbb{R} \text{ sont fixés.} \quad (C) \text{ p 126}$$

Def 1: Une solution de (P) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que: $\forall t \in I, (t, y(t)) \in M$

$\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$

$$y(t_0) = y_0 \quad (C) \text{ p 125}$$

Def 2: Soient $y: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux solutions de (P).

On dit que \tilde{y} est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.

Def 3: On dit qu'une solution $y: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y}: \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $\tilde{I} \supset I$.

Def 4: Si $M = J \times \Omega$ où J est un intervalle de \mathbb{R} , une solution est globale si elle est définie sur J .

$$(C) \text{ p 129}$$

Thm 5: Thm de Cauchy-Peano. Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue, alors le problème (P) admet au moins une solution. (C) p 137

Prop 6: Ce thm ne nous donne pas l'unicité.

Pour $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$, $y_0 = 0$ et $t_0 = 0$ sont deux solutions globales de (P), sans la condition initiale $y_0 = 0$.

$$(C) \text{ p 138}$$

II - Quelques exemples de col. 2 de relations.

1) Équation de Bernoulli.

Méth 14: Pour résoudre une équation de la forme

$$y' = p(t)y + q(t)y^k, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ avec } p, q: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues,}$$

on se pose au 1^{er} $u = R \times]0, +\infty[$, et on multiplie par y^{-k} :

$$y^{-k} y' = p(t) y^{1-k} + q(t)$$

On pose $z = y^{1-k}$, et on obtient: $\frac{1}{1-k} z' = p(t)z + q(t)$. (D) p 144

2) Équation de Riccati.

Méth 15: Pour résoudre une équation de la forme

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t) \text{ avec } a, b, c: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues,}$$

on commence par trouver une solution particulière y_1 .

On pose $z = y - y_1$, et on écrit $z' = 2a(t)z + b(t) + a(t)z^2$

On pose $u = z^{-1} = \frac{1}{z}$, et on se ramène à une eq d'ordre 1. (D) p 145

3) Équation à variables séparées.

Méth 16: Pour résoudre une équation différentielle de la forme:

$$y' = f(t)g(y) \text{ avec } f \text{ et } g \text{ continues, on se pose:}$$

• Si $g(y) = 0$, la fonction constante $y(t) = y_0$ est solution.

• Si $u = 1/g(y)$, $u(y) \neq 0$, on a $\frac{du}{dy} = f(t)u$ et on résout. (D) p 158

III - Étude de stabilité.

1) Définitions.

On suppose ici que notre problème de Cauchy (P) admet une solution globale sur (α, β) .

Déf 17: 1) Soit $y_0: t_0, t_0 + \epsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$ solution maximale du problème de Cauchy (P) avec $y(t_0) = y_0$. La solution y est dite stable si

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que: 1) $\forall y_0' \in B(y_0, \delta)$, la sol y' est définie sur (α, β) , avec $y'(t) = y(t)$ 2) $\forall t \in T_0$, $\|y(t) - y_0(t)\| < \epsilon$

(V) p 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

ii) On dit que y est solution instable si y est stable et si: 3) $\exists y_0$ tel que $\forall y_0' \in B(y_0, \delta)$, la sol y' du problème de Cauchy avec $y'(t_0) = y_0'$ ne satisfait: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y_0(t)\| = 0$. (E2) p 382

2) Le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants
On considère l'équation différentielle: (L) $y' = Ay$.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes distinctes de A .
Prop 18: La solution de (L) est donnée par $y(t) = e^{i\lambda_1 t} y_0 + \dots + e^{i\lambda_n t} y_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (D) p 201

Ex 19: Une particule de masse m et de charge électrique q se déplace dans \mathbb{R}^3 sous l'action d'un champ magnétique \vec{B} et d'un champ électrique \vec{E} , supposés d'intensités du temps. On a $\vec{F} = q\gamma \vec{v} + q\vec{E} = m\ddot{\vec{r}}$ par le principe fondamental de la dynamique. Avec le mouvement et l'équation. (D) p 203

Prop 20: Les solutions du système (L) sont:
• asymptotiquement stables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, m, D$.
• instables s'il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$.
• stables si $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ et si $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ et si $\operatorname{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et si λ_j est simple. (E2) p 284

Ex 21: Les cas particuliers de la dimension 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A :
• Si λ_1 et λ_2 ont même partie réelle: $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$: figure 4
 $\rightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$: figure 5
 $\rightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha + i\beta$: figure 6
• Si λ_1 et λ_2 ont parties réelles différentes: figure 7

• Si λ_1 et λ_2 ont parties réelles différentes: figure 8
(V) p 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

⊕ → Th. d'Asquod
→ Fcts de Lyapunov

3) Le cas général :

Thm 22 : fhm de Liouville. On considère ici la problème de Cauchy $y'' = f(x, y)$ avec $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C¹, telle que $f(x, 0) = 0$. $y(x_0) = y_0$

1) Si la matrice $Df(x)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

2) Si la matrice $Df(x)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors 0 est un point d'équilibre instable.

IV - Quelques exemples.

1) Les équations de Hill - Mathieu

Prop 23 : On considère l'équation différentielle (1) : $y'' + q(t)y = 0$.

1) Si $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_{t_0}^{+\infty} |q(t)| dt < +\infty$

a) Si q admet une relation bornée de (1), alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = 0$

b) Si q admet des relations non bornées.

2) Si $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement négative :

a) La seule relation nulle de (1) bornée sur \mathbb{R}^+ est $y = 0$

b) Une relation non nulle s'annule au plus une fois sur \mathbb{R}^+ .

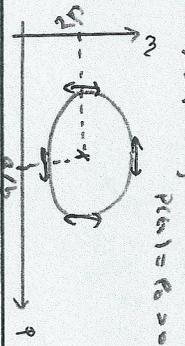
3) Si $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est C¹, strictement positive et croissante, alors toutes les relations de (1) ont bornes sur \mathbb{R}^+ .

2) Le système de Volterra - Volterra.

Prop 24 : On considère le système différentiel :

$y'(t) = a(t)y + b(t)x(t)$ où $a, b, c, d > 0$, $m(t) = m_0 > 0$
 $x'(t) = -c(t)x + d(t)y(t)$ où $c, d > 0$

Les cas relatifs sont globaux et particuliers.



V. Stabilité numérique et conservation du Hamiltonien.

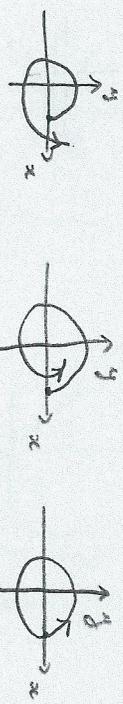
On considère le système différentiel $x' = -y$ où $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

La relation exacte est $(\cos(t), \sin(t))$

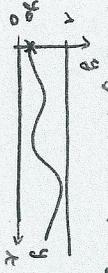
La quantité $H(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = x'(t) + y'(t) = 1$ est conservée au cours du temps (ce qui est équivalent au Hamiltonien (i)).

On s'intéresse aux schémas numériques, et on se demande s'ils conservent la Hamiltonien :

Euler explicite : Euler implicite : Euler point milieu :



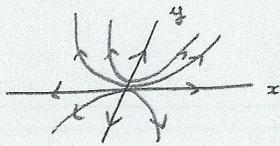
(*) Ex : Si $f(x, y) = y - y^3$, alors pour $y_0 \in]0, 1[$, la solution est globale.



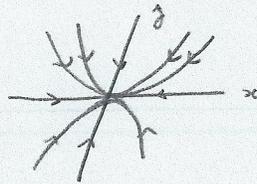
- Références :
- Demilly (CD)
 - Rouvière (CAV)
 - Goueoul Imagerie (C6)
 - Zwily DDEFETE (C20)
 - MADÈRE Dpto d'analyse (CAV).

Figure 1 :

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
Nœud impropre instable



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
Nœud impropre stable



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Point col

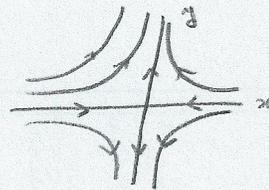
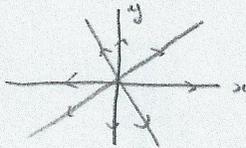


Figure 2 :

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
Nœud propre instable



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
Nœud propre stable

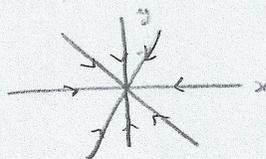
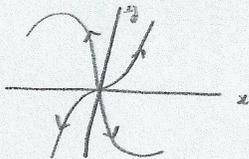


Figure 3 :

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
Nœud exceptionnel instable



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
Nœud exceptionnel stable

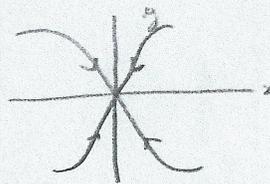
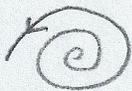


Figure 4 :

$\lambda_1 = d + i\beta$
 $\lambda_2 = d - i\beta$
 $d > 0$
Foyer instable



$d < 0$
Foyer stable



$d = 0$
Centre

