220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives de solutions.

220 - Équations différentielles $x' = f(t, x)$. Exemples d'études qualitatives de solutions.

I - Théorie des équations différentielles

1) Étude de l'existence et de l'unicité des solutions.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue.

Dans la suite, on considèrera le problème de Cauchy :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ et } t_0 \in \mathbb{R} \text{ sont fixés.}$$

(D) p 126

Déf 1 : Une solution de (P) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^m$ telle que : $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$

$\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$

$y(t_0) = y_0$

(D) p 125

Déf 2 : Soient $y : I \to \mathbb{R}^m$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (P).

On dit que y est un prolongement de $\tilde{y}$ si $\tilde{I} \subset I$ et $y_{|\tilde{I}} = \tilde{y}$.

(D) p 128

Déf 3 : On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$.

(D) p 128

Déf 4 : Si $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution est globale si elle est définie sur J. (D) p 129

Thm 5 : Thm de Cauchy-Peano. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue, alors le problème (P) admet au moins une solution. (D) p 137

Rmq 6 : Ce thm ne nous donne pas l'unicité.

Pour $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$, $\begin{array}{l} y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto 0 \end{array}$ et $\begin{array}{l} y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto t^3 \end{array}$ sont deux solutions globales de (P), pour la condition initiale $y_0 = 0$.

(D) p 138

Thm 7 : Thm de Cauchy-Lipschitz. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'espace. Alors le problème de Cauchy (P) admet une unique solution maximale. (D) p 141

Ex 8 : Pour $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad (t, x) \mapsto |x| \end{array}$, on a existence et unicité de la solution maximale.

2) Quelques outils d'étude de solutions.

Prop 9 : Lemme de Gronwall. Soient α, β et v trois fonctions réelles continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $\beta \geq 0$ sur $[a, b]$.

On suppose que : $\forall t \in [a, b]$, $v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) v(s)\, ds$.

Alors $\forall t \in [a, b]$, $v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(u)\, du\right) ds$.

(Rou) p 132

Thm 11 : Thm de sortie de tout compact. Si $f :]a, b[\times \Omega \to \mathbb{R}^m$, soit $y : J \to \mathbb{R}^m$ une solution de (P), où $J =]\alpha, \beta[$, $a < \alpha < \beta < b$.

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ et un compact $K_0 \subset \Omega$ tels que $\forall t \in [\beta - \delta, \beta[$ (resp $t \in]\alpha, \alpha + \delta]$), $y(t) \in K_0$, alors y peut être prolongée au-delà de β (resp de α) en une solution de (P). (ZQ) p 381

Prop 12 : Si $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, (*) alors si f vérifie de plus la condition 1 ou la condition 2, une solution maximale du problème de Cauchy (P) est globale.

1) Il existe $k : J \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t, y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$.

2) Il existe des fonctions c et $k : J \to \mathbb{R}^+$ continues telles que l'application $y \mapsto f(t, y)$ satisfasse une inégalité du type :

$$\|f(t, y)\| \leq c(t) + k(t) \|y\|.$$

(D) p 144

Ex 13 : Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est C^1 et bornée, on a existence globale de la solution. Par exemple, $\begin{cases} y' = \sin(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ a une sol. globale.

II - Quelques exemples de calcul de solutions.

1) Équations de Bernoulli.

Méth 14 : Pour résoudre une équation de la forme

$y' = p(t)y + q(t)y^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ avec $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues,

on se place sur $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, et on multiplie par $y^{-\alpha}$:

$$y^{-\alpha} y' = p(t) y^{1-\alpha} + q(t)$$

On pose $z = y^{1-\alpha}$, et on obtient : $\frac{1}{1-\alpha} z' = p(t) z + q(t)$.

(D) p 164

2) Équations de Ricatti.

Méth 15 : Pour résoudre une équation de la forme

$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ avec $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues,

on commence par trouver une solution particulière y_1.

On pose $z = y - y_1$, et on obtient $z' = 2a(t)y_1 + b(t) + a(t) z^2$

On pose $\omega = z^{1-\alpha} = \frac{1}{z}$, et on se ramène à une éq d'ordre 1.

(D) p 165

3) Équations à variables séparées.

Méth 16 : Pour résoudre une équation différentielle de la forme :

$y' = f(t) g(y)$ avec f et g continues, on regarde :

- Si $g(y_0) = 0$, la fonction constante $y(t) = y_0$ est solution.
- Sur $\mathcal{U} = \{(x,y), g(y) \neq 0\}$, on a $\frac{dy}{g(y)} = f(t)\,dt$, et on résout.

(D) p 158

III - Étude de stabilité.

1) Définitions.

On suppose ici que notre problème de Cauchy (P) admet une solution globale sur $[t_0, +\infty[$.

Déf 17 : i) Soit $y : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^m$ solution maximale du problème de Cauchy (P) avec $y(t_0) = y_0$. La solution y est stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que : 1) $\forall \tilde{y}_0 \in B(y_0, \delta)$, la sol $\tilde{y}$ est définie sur $[t_0, \infty[$, avec $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ 2) $\forall t \geq t_0$, $\| y(t) - \tilde{y}(t) \| \leq \varepsilon$

ii) On dit que y est solution asymptotiquement stable si y est stable et si : 3) $\exists \eta > 0$ tel que $\forall \tilde{y}_0 \in B(y_0, \eta)$, la sol $\tilde{y}$ du problème de Cauchy avec $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$ vérifie :

$$\lim_{t \to +\infty} \| \tilde{y}(t) - y(t) \| = 0.$$

(ZQ) p 382

2) Le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants

On considère l'équation différentielle : (L) $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres complexes distinctes de A.

Prop 18 : La solution de (L) est donnée par $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$ pour tout $t \geq t_0$.

(D) p 201

Ex 19 : Une particule de masse m et de charge électrique q se déplace dans $\mathbb{R}^3$ sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$, uniformes et indépendants du temps. On a $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E} = m\vec{\gamma}$ par le principe fondamental de la dynamique. Alors le mouvement est hélicoïdal.

(D) p 203

Prop 20 : Les solutions du système (L) sont :

- asymptotiquement stables ssi $Re(\lambda_j) < 0$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$.
- instables s'il existe $j \in [\![1, m]\!]$ tel que $Re(\lambda_j) > 0$.
- stables ssi $\forall j \in [\![1; m]\!]$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

(D) p 284

Ex 21 : Le cas particulier de la dimension 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A :

* Si λ_1 et λ_2 sont réelles : → $\lambda_1 \neq \lambda_2$: figure 1

→ $\lambda_1 = \lambda_2$ et A diagonalisable : fig 2

→ $\lambda_1 = \lambda_2$ et A non diagonalisable : fig 3

* Si λ_1 et λ_2 sont complexes : fig 4.

(Voir l'annexe pour les dessins dans le plan de phase).

(D) p 291

(7) → Th. d'Osgood

→ Fcts de Lyapounov

3) Le cas général.

DVPT 1

Thm 22 : Thm de Liapunov. On considère ici le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, telle que $f(0) = 0$.

1) Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

2) Si la matrice $Df(0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors 0 est un point d'équilibre instable.

(ROU) p° 143

IV - Quelques exemples.

1) Les équations de Hill-Mathieu

DVPT 2

Prop 23 : On considère l'équation différentielle (L) : $y'' + q(t)y = 0$.

1) Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} |q(t)|\,dt$ converge

a) Si y est une solution bornée de (L), alors $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$

b) (L) admet des solutions non bornées.

2) Si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et strictement négative :

a) La seule solution réelle de (L) bornée sur $\mathbb{R}$ est $y \equiv 0$

b) Une solution non nulle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

3) Si $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est C^1, strictement positive et croissante, alors toutes les solutions de (L) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

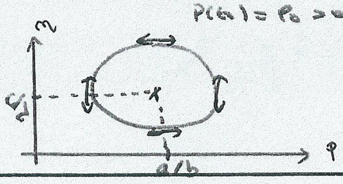
(G) p° 363

2) Le système de Lotka-Volterra.

Prop 24 : On considère le système différentiel :

$\begin{cases} m'(t) = a\,m(t) - b\,m(t)P(t) \\ P'(t) = -c\,P(t) + d\,m(t)P(t) \end{cases}$ où $a, b, c, d > 0$, $m(t_0) = m_0 > 0$, $P(t_0) = P_0 > 0$.

Alors les solutions sont globales et périodiques.



(MAD) p° 226

V - Méthodes numériques et conservation du hamiltonien.

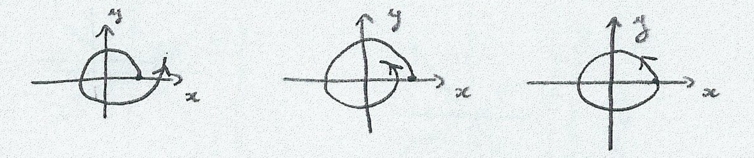
On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ où $\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$.

La solution exacte est $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

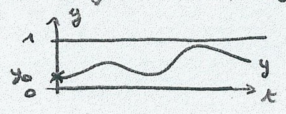
La quantité $H(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = 1$ est conservée au cours du temps (ce qui est appelé un hamiltonien ici).

On s'intéresse aux schémas numériques, et on se demande s'ils conservent le hamiltonien :

Euler explicite : Euler implicite : Euler point milieu :



(*) Ex : Si $f(y) = y - y^3$, alors pour $y_0 \in]0, 1[$, la solution est globale.

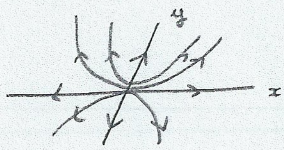


Références : DEMAILLY (D)
ROUVIÈRE (ROU)
GOURDON Analyse (G)
ZUILY QUEFFELEC (ZQ)
MADÈRE Dvpts d'analyse (Mad).

Figure 1 :

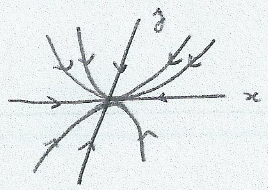
$0<\lambda_1<\lambda_2$

Noeud impropre instable



$\lambda_2<\lambda_1<0$

Noeud impropre stable



$\lambda_1<0<\lambda_2$

Point col

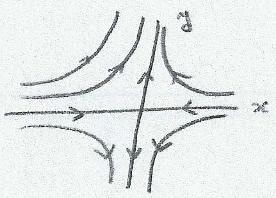
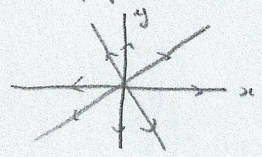


Figure 2 :

$\lambda_1=\lambda_2>0$

Noeud propre instable



$\lambda_1=\lambda_2<0$

Noeud propre stable

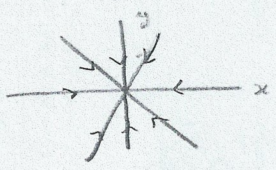
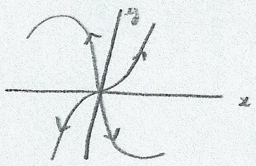


Figure 3 :

$\lambda_1=\lambda_2>0$

Noeud exceptionnel instable



$\lambda_1=\lambda_2<0$

Noeud exceptionnel stable.

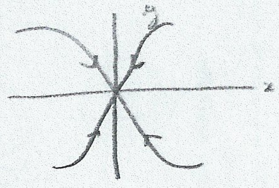


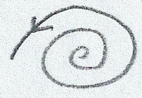
Figure 4 :

$\lambda_1=\alpha+i\beta$

$\lambda_2=\alpha-i\beta$

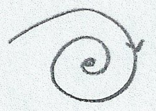
$\alpha>0$

Foyer instable



$\alpha<0$

Foyer stable



$\alpha=0$

Centre