→ p-e inclure séries entières (bord) Si à l'aise : prolongt en th. de la mesure (Carathéodory,)

207 - Prolongement de fonctions. Exemple et Applications

I Prolongements et Continuité

Définition : Soient deux espaces topologiques Y et E, un sous espace $X \subset Y$ et une application $f : X \to E$. Un prolongement g de f sur Y est une application $g : Y \to E$ telle que $g_{/X} = f$.

Remarque : Si g est continue, on parle de prolongement continu.

Proposition : Soient E et X deux espaces topologiques métrisables et $f : X \setminus \{a\} \to E$ une application continue, $a \in X$.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = w \in E$ alors f admet un prolongement continu $\tilde{f} : X \to E$ tel que $\tilde{f}_{/X\setminus\{a\}} = f$ et $\tilde{f}(a) = w$

Exemples : - Sur $]0,+\infty[$ $x \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge en 0
- Sur $\mathbb{R}^*$ $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ se prolonge en 0

Théorème : Prolongement des applications uniformément continues
[Pom] Soient E et F deux espaces métrique, F complet, A une partie dense de E et $f : A \to F$ uniformément continue.
Il existe une unique application $g : E \to F$ qui prolonge f continuement. De plus, g est uniformément continue.

Applications :
[Gou] - Unicité, à isométrie près, du complété d'un espace métrique
[Rud] - Construction de l'intégrale de Riemann sur les fonctions réglée :
$$I : (Esc([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathbb{1}_{]x_i,x_{i+1}[} + \sum_{i=0}^{n} \mu_i \mathbb{1}_{\{x_i\}} \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$
I se prolonge continuement à l'ensemble des fonctions réglée : $\overline{Esc([a,b])}$.

- Prolongement de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$:

Théorème de Plancherel
[Rud] * Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
Sa transformée de Fourier $\hat{f}$, définie par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$ vérifie $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$
* La transformée de Fourier-Plancherel, définie par
$$\mathcal{P} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$$
se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème de Tietze : [DEV]
[ZQ] Soit (X,d) un espace métrique, Y un fermé de X et $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue
Il existe une application f_0 qui prolonge g_0 continuement sur X.

Théorème de Hahn-Banach :
[ZQ] . Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'une semi-norme $p : E \to \mathbb{R}$
. Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant
$$\forall x \in G \quad g(x) \leq p(x)$$
Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g telle que
$$\forall x \in E \quad f(x) \leq p(x).$$

Généralisation : Théorème du prolongement lipschitzien
[ZQ] Soient H un espace de Hilbert, M une partie de H et $f : M \to H$ telle que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|$ $\forall x,y \in M$.
Alors il existe un prolongement g de f sur H tel que
$$\forall x,y \in H \quad \|g(x) - g(y)\| \leq \|x-y\|.$$

II Prolongement et différentiabilité

A) Régularité

Proposition (Pom) : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I \setminus \{a\}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si $\forall k \in [0, p]$, $f^{(k)}$ admet une limite en a
Alors f est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^p$ sur I.

Exemples : $t \mapsto \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ se prolonge de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Application : Existence de fonctions plateaux
(Rou) Etant donnés deux intervalles $[a, d]$ et $[b, c]$ strictement emboîtés $(a < b < c < d)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([a,d])$ telle que
- $\forall x \in [a, d]$ $0 \leq f(x) \leq 1$
- $\forall x \in [b, c]$ $f(x) = 1$
- $\operatorname{supp}(f) \subset [a, d]$

Théorème de Borel :
(ZQ) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de réels, $x_0 \in \mathbb{R}$
Il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^{(k)}(x_0) = a_k$$

Corollaire (Rou) : Toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle compact $[a, b]$ peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

B) Equations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. On s'intéresse à l'équation différentielle :
$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (*)$$

Définitions : (i) On dit que (x, J) est une solution de $(*)$ si $J \subset I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $x \in \mathcal{C}^1(J)$ et x vérifie $(*)$ en tout point t de J.

(ii) On dit que $(\tilde{x}, \tilde{J})$ est un prolongement de la solution (x, J) si $J \subset \tilde{J}$ qui est un intervalle, $\tilde{x}$ est solution sur $\tilde{J}$ et $\forall t \in J$ $\tilde{x}(t) = x(t)$

(iii) Une solution est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement

(iv) Une solution est dite globale si $J = I$

Théorème : Soit $I =]a, b[$, $a < b \in \mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$
(ZQ) Soit (x, J) une solution maximale de $(*)$ où $J =]T^-, T^+[$
Alors $\left|\begin{array}{l} \text{ou bien } T^+ = b \\ \text{ou bien } T^+ < b \text{ et } \lim\limits_{t \to T^+,\, t<T^+} |x(t)| = +\infty \end{array}\right.$

et de même $\left|\begin{array}{l} \text{ou bien } T^- = a \\ \text{ou bien } T^- < a \text{ et } \lim\limits_{t \to a,\, t>a} |x(t)| = +\infty \end{array}\right.$

Corollaire : Critère de Prolongement
Soient $I =]a, b[$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et (x, J) une solution de $(*)$ où $J =]\alpha, \beta[$: $a < \alpha < \beta < b$.
Si il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tels que
$$\forall t \in [\beta - \delta, \beta[\quad |x(t)| \leq A$$
(resp $\forall t \in]\alpha, \alpha + \delta]$) Alors x peut être prolongée au delà de β (resp α) en une solution de $(*)$.

Applications : • $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue telle que
$$\left|\begin{array}{l} \forall K \subset I \text{ compact } \exists C_1, C_2 > 0 \\ \text{tels que } |f(t, x)| \leq C_1 |x| + C_2 \quad \forall t, x \in K \times \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$
Alors toute solution de $(*)$ est globale.

Exemples : - Systèmes linéaires $x'(t) = A(t) x(t) + B(t)$
- sur $\mathbb{R}$, l'équation $x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^2(t)}$

III Prolongement et Holomorphie

Proposition : Principe de reflection de Schwartz
[AMA] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel.
Soit f holomorphe sur $\Omega' = \Omega \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$.
Si f prend des valeurs réelles en tout points de l'axe réel, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Théorème des zéros isolés :
[OA] Si f est une fonction analytique sur un ouvert connexe Ω et si f n'est pas identiquement nulle.
Alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω.

Théorème : principe du prolongement analytique :
[OA] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ connexe.
Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset \Omega$ ayant un point d'accumulation dans Ω alors elles sont égales sur Ω

Applications : les prolongements analytiques des fonctions Gamma et Zeta sont uniques.

Exemple : Il existe une unique fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

Proposition : Toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$
[OA] est analytique sur Ω

Application : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction analytique réelle sur I.
Il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et une fonction g holomorphe sur Ω tels que $I \subset \Omega$ et $g_{/I} = f$.

Exemples de prolongements analytiques :

- La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^+$ par
[ZQ] $\forall t > 0$: $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$

La fonction Gamma est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et admet un prolongement analytique sur $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ donné par la même formule [DEV]
De plus, Gamma admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ donné par

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

- La fonction Zeta de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$ par
[ZQ] $\forall s > 1$ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

La fonction Zeta est $\mathcal{C}^\infty$ et elle admet un prolongement analytique sur $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ donné par la même formule.
De plus, elle admet un prolongement analytique sur $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ donné par :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \{t\} \frac{dt}{t^{s+1}}$$

où, en notant $[t]$ la partie entière de t, $\{t\} = t - [t]$.

[Pom] : Pommelet - "Cours d'analyse"
[GOU] : Gourdon - "Analyse"
[RUD] : Rudin - "Analyse réelle et complexe"
[ZQ] : Zuily-Queffélec - "Éléments d'analyse pour l'agrégation"
[ROU] : Rouvière - "Calcul diff"
[AMA] : Amar - Matheron - "Analyse Complexe"
[OA] : Objectif Agrégation

Dvp. classiques
Tietze, Gamma, pts singuliers d'une SeE, th. taubériens, espérance cond. L' ...