autre ex : $\mathbb{Q}$ ac des distances p-adiques, Corps $\mathbb{Q}_p$ ⊕ Espaces semi-normés ?

205 : Espaces complets. Exemples et aplications

I Généralités sur les espaces complets.

I-1 Définitions, propriétés et exemples

Définition : Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de E. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p>N$, $\forall q>N$ $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. ([GOU] p 20)

Remarques : ([GOU] p10)

- Une suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- La notion de suite de Cauchy est une notion métrique et pas topologique. Par exemple pour $E =]0,1]$, les distances d_1 et d_2 définies par $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ sont topologiquement équivalentes et (E,d_1) n'est pas complet, alors que (E,d_2) l'est. ([HAU] p 310, 313)

Proposition : Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de Cauchy de E. La suite (x_n) est convergente si et seulement si elle possède une sous suite convergente. Autrement dit, une suite de Cauchy dans E possédant une valeur d'adhérence est convergente. La valeur d'adhérence est alors unique et c'est la limite de la suite. ([NEHH] p88)

Définition : On dit qu'un space métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente. ([GOU] p 20)

Exemples : • (X,d) compact est complet.

- Les espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont complets. ([GOU] p20)
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^*$, $]0,1[$ munit de la ~~topologie~~ métrique usuelle ne sont pas complets
- Tout space vectoriel de dimension finie est complet ([GOU] p50)
- Si F est un space vectoriel normé complet, et E un espace vectoriel normé, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un evn complet. En particulier le dual topologique de tout space vectoriel normé est un evn complet. ([GOU] p 48, 49) ([NEHH] p235)
- $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$ n'est pas complet, mais $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est complet ([NEHH] p55)
- Soit X un ensemble et soit $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ le l'ev des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On munit cet ensemble de la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ $\forall f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. C'est un space vectoriel normé complet. ([GOU] p 21)

ex non normé : $H(\Omega)$ (semi-normé) (cf aussi [NEHH] p 230) , CVU sur les compacts.

I-2 Propriétés des spaces complets.

Proposition : ([GOU] p10)

- Toute partie complète d'un espace métrique est fermé.
- Toute partie fermé d'un space métrique complet est complète.

Proposition : Soit $((X_n, d_n))_{n \geq 0}$ une suite d'spaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = \prod_{n \geq 0} X_n$ est complet si et seulement si (X_n, d_n) est complet $\forall n \in \mathbb{N}$. ([NEHH] p91)

Théorème : Soit (E,d) un space métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes : (Lo El Hassan)

(i) L'space (E,d) est complet.

(ii) L'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de parties fermées non vides de (E,d) telle que $\lim_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0$ contient un point et un seul. ([NEHH] p92)

Application : - méthode de dichotomie
- Lemme de Baire (à ouvrir) ([NEHH] p 100)

Théorème : (de prolongement)

Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. Soit A une partie dense dans E et $f : A \longrightarrow E'$ une application uniformément continue. Si (E',d') est complet, f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : E \to E'$. De plus $\tilde{f}$ est elle même uniformement continue. ([NEHH] p 92)

Application : Le théorème suivant concernant le complété.

I-3 Complété d'un espace métrique

Théorème : Soit (E,d) un space métrique, alors on a :

1) Il existe un space métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ et il existe une application isométrique $i : X \to \hat{X}$ telle que $i(X)$ soit dense dans $\hat{X}$, et ainsi, on peut identifier X à $i(X)$, et considérer X comme un sous ensemble dense de $\hat{X}$.

2) Si (Y,d') est un space métrique complet, et s'il existe une application isométrique $j : X \to Y$ telle que $j(X)$ soit dense dans Y, alors il existe une unique application continue $\varphi : \hat{X} \to Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & Y \\ & \hat{X} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

De plus φ est une isométrie de $\hat{X}$ sur Y, autrement dit $(\hat{X}, \hat{d})$ et (Y,d') sont isométriques. ([NEHH] p97)

Exemples : • Le complété de $(\mathcal{C}[0,1], \|\ \|_1)$ est $L^1([0,1], \|\ \|_1)$.

- $\mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues à support compact), munit de $\|\ \|_\infty$, a pour complété $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ (l'ensemble des fonctions continues tendant vers 0 en $\pm\infty$) ([NEHH] p98)
- $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$; Le complété de $]0,1[$ est $[0,1]$.
- l'ensemble des suites à valeurs réelles presque nulles a pour complété $\ell^1(\mathbb{R})$

⚠ Eviter de Fréchet... (on est puni par là où on a Fréchet)

II Théorème du point fixe et applications

II_1 Enoncé

Théorème : (du point fixe de Banach Picard) ([GOU] p 21)([NEHH] p93)
Soit (E,d) un espace métrique complet et f une application de E dans E, contractante de rapport k. Alors on a
1) f qui possède un unique point fixe x^*
2) La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers x^*, pour x_0 quelconque pris dans E et de plus, $d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$ $\forall n \geq 0$

Remarque : Le théorème n'est plus vrai si (E,d) n'est pas complet.
Contre exemple : si $E =]0,1]$ muni de la distance euclidienne et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$, alors f est contractante mais n'admet aucun point fixe ([NEHH] p94)

II_2 Applications

- **Théorème** (d'inversion locale)
Soit E F deux espaces de Banach de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que f'_a soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur $W = f(V)$. ([GOU] p 321) ([ROU] p 188)

- **Théorème** : (de Cauchy Lipschitz)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable avec $U = J \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $t_0 \in J$ et $y_0 \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$, et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ avec $\varphi(t_0) = y_0$, de plus il y a unicité pour le problème de Cauchy de cette équation différentielle en (t_0, y_0). ([GOU] p354) ([D] p 141)

D
v
P

ds le cas linéaire...

- **Equation intégrale de Volterra** ([ROU] p 172)
Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation intégrale : $\forall t \in I$, $x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)\, x(s)\, ds$ avec $\varphi \in E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, admet toujours une unique solution x dans E.

Remarque : Le théorème de BP est fondamental, et c'est pourquoi on cherche souvent à transformer un problème donné, en un problème de point fixe équivalent car la suite définie dans le théorème du point fixe nous donne, (dans le cas où le théorème s'applique) un algorithme qui converge vers la solution.
Par exemple :
- Résolution de l'équation $F(x) = 0$ et la méthode de Newton.
- Résolution d'un système linéaire $Ax = b$ ($A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$) avec les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel.

III Espaces de Banach. Lemme de Baire et conséquences

III_1 Généralités :

Définition : On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

Théorème : Soit $(E, \|\ \|)$ un espace normé. On a équivalence ([NEHH] p255) ([GOU] p52)
(i) $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach.
(ii) Toute série $\sum x_n$ d'éléments de E normalement convergente (ie si $\sum \|x_n\| < +\infty$) est convergente dans E.

Application : Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$ alors $Id - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$ ([GOU] p 49).

III_2 Complétude des espaces L^p

Théorème (Fischer-Riesz) : $L^p(\Omega)$ est complet pour $1 \leq p \leq \infty$ (Ω mesurable) ([BRE] p 57)

Applications : . Théorème de Plancherel
. Théorème de convergence L^2 des martingales

III_3 Lemme de Baire et conséquences

Lemme : (de Baire) ([GOU] p 397)
Soit (E,d) un espace métrique complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Conséquences :
- L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ([GOU] p 401)
- **Théorème** : (de Banach-Steinhaus) ([GOU] p 404)
Soit E un espace de Banach et F un evn. Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors, ou bien $(|||f|||)_{f \in H}$ est borné, ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

applications : - Il existe des fonctions continues 2π périodiques, différentes de leur série de Fourier.
- Pour toute suite de points d'interpolation dans un intervalle fermé borné I, on peut toujours trouver une fonction f continue sur I pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange correspondant ne converge pas uniformément vers f sur I. ([ROM] p27)

- **Théorème** (de l'application ouverte et Théorème de Banach) ([GOU] p 409)
(Théorème de l'application ouverte) Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue et surjective, avec E et F deux espaces de Banach. Alors T est ouverte.
(Théorème de Banach) Si $T : E \to F$ est une application linéaire continue et bijective, avec E et F espaces de Banach, alors T^{-1} est continue. ([BRE] p 18,19)

  Application : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.
- Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet. ([GOU] p 399)

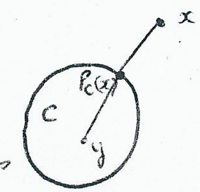
(oubli of fin)

IV Espaces de Hilbert

IV.1 Définition. Théorème de projection et application.

Définition : On appelle espace de Hilbert tout espace muni d'un produit scalaire complet.

Théorème : (Projection sur un convexe fermé) ([OA] p 95)
Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H.
Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique élément de C, qui réalise la distance de x à C et il est noté $P_C(x)$. On a ainsi $\forall y \in C, \|x - P_C(x)\| \leq \|x-y\|$
L'élément $P_C(x)$ est de plus caractérisé par :
(i) $P_C(x) \in C$
(ii) $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle) \leq 0$, pour tout $y \in C$



Remarque : Il en découle le théorème de projection sur un sous espace vectoriel fermé ([OA] p 98)

Applications (du théorème de projection sur un sous espace vectoriel fermé) ([OA] p 100)
- critère de densité dans les espaces de Hilbert :
  Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$. F est dense dans $H \iff F^{\perp} = \{0\}$.
- Construction de l'espérance conditionnelle.

IV.2 Exemples importants d'espaces de Hilbert.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids (ie une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$)
On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable, à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x)\, dx$. Cet espace est un espace de Hilbert. ([OA] p 110)
- $(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \| \|_2)$; $(L^2(\mathbb{R}), \| \|_2)$; $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \|_2)$ ([OA] p 91)

IV.3 Les théorèmes de Lax-Milgram et de Stampacchia

Théorème (de Stampacchia) ([BRE] p 82) (+) Inclure le th. de Riesz ici !

Soit H un espace de Hilbert réel, et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit C un convexe fermé et non vide. Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $u \in C$ unique tel que
$a(u, v) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in C$.
De plus si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété
$u \in C$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in C} \{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \}$

Remarque : Ce théorème se démontre avec le théorème du point fixe.

Corollaire : (de Lax-Milgram) ([BRE] p 84)
Soit H un espace de Hilbert réel, et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que $a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \ \forall v \in H$.
De plus si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété
$u \in H$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \}$

IV.4 Le théorème d'échantillonnage de Shannon.

Théorème : On note $BL^2 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \}$.
L'application $U : BL^2 \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $u \longmapsto (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une isométrie d'espace de Hilbert et $\forall u \in BL^2, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \operatorname{sinc}(x - k)$.
[WIL] p 126

DVP

-

(oubli)

III.4 Théorème du graphe fermé

Théorème : (du graphe fermé) ([BRE] p 20)
Soit E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T est fermé dans $E \times F$.
Alors T est continue.
Remarque : C'est une conséquence du Théorème de Banach.