203 - Utilisation de la notion de compacité

[P] **Définition** : (Borel-Lebesgue) Un espace topologique séparé X est dit compact lorsque de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini

I - Premières utilisations

1) Recouvrement

[P] **Th** : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction réglée de $[a,b]$ dans un evn E. (réglée : ayant en tout point une limite à droite et à gauche). Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

[G] p228 **Th** : (Dini 1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.

(P) + [G] p39 **Th** : Soit X un espace compact. Soit I un idéal propre de l'anneau $C(X,\mathbb{R})$. Alors il existe $a \in X$ tel que

$$\forall f \in I \quad f(a) = 0.$$

2) Extraction de sous-suites

Soit (E,d) un espace métrique.

[P] **Th** : (Bolzano-Weierstrass) (E,d) est compact ssi de toute suite de points de E on peut extraire une sous-suite convergente.

(P) **Th** : Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

[P] **Appli** : * Une suite réelle bornée possède une valeur d'adhérence.
* Si A est un fermé de (E,d) dont tous les points sont isolés, alors A est fini.

(P) **Th** : Si E compact, une suite (x_n) de (E,d) converge ssi elle possède au plus une valeur d'adhérence.

Appli : Soit F un evn compact, et soit f une application continue de E dans F. f est continue ssi le graphe de f est fermé dans $E \times F$.

⊕ Ajouter plus d'applications
(~ 1 par th., même triviale)

II - Fonctions continues sur un compact.

1) Généralité

Th : Soient E et F deux evn, E compact, $f : E \to F$ continue. Alors $f(E)$ est une partie compacte de F. [P]

Th : Si f est une bijection continue d'un compact E sur un evn E', alors f est un homéomorphisme. [P]

Prop : Soient (E,d), (F,d') deux evn, $f : E \to F$ continue telle que $\forall K$ compact de F $f^{-1}(K)$ est compact. Alors f est une application fermée. [Ca] p31

Appli : L'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}_n[X]$ dont toutes les racines sont réelles est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Prop : Soient (E,d), (F,d') deux evn, $f : E \to F$ injective. Alors f est continue ssi $\forall K$ compact de E, $f(K)$ est compact. [G] p36

2) Extremums

Th : Soient E un compact non vide, $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes [P]

Appli : * Avec le TVI on a $f([a,b]) = [c,d]$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. [P]

* Soit A une partie compacte non vide d'un evn E.
i) $\forall y \in E$ $\exists x \in A$ tel que $d(y,A) = d(x,y)$.
ii) $\exists a,b \in A$ tels que $d(a,b) = \operatorname{diam}(A)$
iii) Soit F une partie fermée de E evn de dimension finie : $\forall y \in E$ $\exists x \in F$ tel que $\|x-y\| = d(y,F)$.

* **Th de Rolle** : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :
i) f continue sur $[a,b]$ ii) f dérivable sur $]a,b[$ iii) $f(a) = f(b)$ [G] p41
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Prop : Soient E un evn de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ continue coercive ($\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$). Alors f est minorée et atteint son minimum. [P] p29

Appli : Th D'Alembert-Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine.

Th : Soient C un convexe compact, $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe sur C. Alors f admet un unique minimum sur C. [Ca] p30

Appli : Ellipsoïde de John-Loewner : Pour tout compact K contenant 0 dans son intérieur, il existe une unique ellipsoïde de volume minimal contenant K. DVP

3) Points fixes

[P] p77 **Th** : Soient (E,d) un em compact non vide, $f : E \to E$ telle que $\forall (x,y) \in E \times E \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$

Alors f possède un unique point fixe $a \in E$.

[GT] p24 **Th** : (Brouwer dimension 2) : Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Toute application continue $f : D \to D$ admet un point fixe. DVP

Rq : Le résultat reste vrai en dimension n.

[S] p54 **Appli** : (Perron-Frobenius). (forme faible). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre positif.

interchanger ces 2 parties

4) Théorème de Heine et applications

[P] p60 **Th** : (Heine) Soient (E,d) un em compact et (F,d') un em, $f : E \to F$ continue. Alors f est uniformément continue.

[P] p62 **Appli** : Une fonction $f : [a,b] \to E$ (E un evn), continue est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux

[G] p288 **Th** : (Fejér) La série de Fourier de toute fonction continue 2π-périodique converge uniformément en moyenne de Césaro vers f.

[G] p228 **Th** : (Dini 2) Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles, continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, Alors la convergence est uniforme.

III - Compacité dans les espaces vectoriels normés

1) En dimension finie

[P] p68 **Th** : Toutes les normes sur un evn de dimension finie sont équivalentes.

[P] **Appli** :
* Soit (E,N) un evn de dimension finie. Une partie X de E est compacte ssi elle est fermée et bornée.
* Un evn de dimension finie est complet.
* Soient $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ deux evn. Si E est de dimension finie, toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

[P] p69 **Th** : (Riesz) Soit E un evn. E est de dimension finie ssi la boule unité fermée de E $\overline{B_E}$ est compacte.

[P] **Appli** : Étude des opérateurs compacts.

2) En dimension infinie

[B] p89 **Déf** : Soient E, F des Banach. $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(\overline{B_E})$ est relativement compacte.

[ZQ] p167 **ex** : $E = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C}), \|\|_\infty)$ $\quad L : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ continue (noyau)

$T : E \to E$

$f \mapsto g : (x \mapsto \int_0^1 L(x,y) f(y)\, dy)$ est compact.

[B] p92 **Th** : Soit E un Banach. Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ Alors
i) $\mathrm{Ker}(I - T)$ est de dimension finie
ii) $\mathrm{Im}(I - T)$ est fermé.
iii) $\mathrm{Ker}(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(I - T) = E$

[B] p95 **Th** : Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, (E un Banach) compact. Avec $\dim E = \infty$

Alors on : i) $0 \in \sigma(T)$
ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
iii) - ou bien $\sigma(T) = \{0\}$
- ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini
- ou bien $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

(Avec $\sigma(T)$ le spectre de T et $VP(T)$ l'ensemble de ses valeurs propres).

IV - Espaces de fonctions continues sur un compact.

1) Théorème de Stone-Weierstrass

[H-L] p29 **Th** : (Stone Weierstrass) Soit (X,d) un em non vide compact.

Cas réel : Toute sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$

Cas complexe : Toute sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C^0(X, \mathbb{C})$

Exemples : 1) Si $X \subset \mathbb{R}^d$ compact

$H = \{x \mapsto P(x) \mid P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]\}$ est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$

cas particulier : $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ $d = 1$: Théorème de Weierstrass.

$\Rightarrow \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ est une base topologique de $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

2) L'ensemble des polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Procédé diagonal

[H-L] p 11 **Th** : (Procédé diagonal) Soit $(X_p, d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'esm et, $\forall p\in\mathbb{N}$, soit $(x_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X_p.
Si $\forall p\in\mathbb{N}$ $\{x_{n,p}, n\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_p, alors il existe une fonction strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall p\in\mathbb{N}$ $(x_{\varphi(n),p})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans X_p.

[H-L] p 12 **Cor.** (Th de Tychonoff) Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'esm compacts et soit $X = \prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit. Alors X est compact.

Appli :

[H-L] p 17 - **Th** : (Banach-Alaoglu) Soit E un espace normé séparable. Pour toute suite bornée $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une forme linéaire continue $T\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ telles que $\forall x\in E$ $\lim_{k\to+\infty} T_{n_k}x = Tx$.

[H-L] p 18 [Z-Q] p 145 **Appli** : Soit E un esm séparable et soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite dense de E. Si $T, S \in B = \{T\in E' \text{ tq } \forall x\in E\ |T(x)|\leq\|x\|\}$ on note $d(T,S) = \sum_{1}^{+\infty} 2^{-n}\frac{|Tx_n - Sx_n|}{1+|Tx_n - Sx_n|}$.
Alors d est une distance sur B et (B,d) est compact.
et si (T_n) une suite d'éléments de B et si $T\in B$
$$d(T_n,T)\to 0 \iff \forall x\in E\ T_n(x)\to T(x).$$

[D-S] - **Th** : (Ascoli) Soit (X,d) un esm compact et A partie de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ ssi A est équicontinue et $\forall x\in X$ $\{f(x), f\in A\}$ est borné.

↳ mettre avant les opérateurs à noyau

Appli : 1) **Th** : (Cauchy-Peano) I_0 intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0\in I_0$, $y_0\in\mathbb{R}^m$ $f : I_0\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue au voisinage de (t_0,y_0). Alors il existe un voisinage J_0 de t_0 dans I_0 et $y\in\mathcal{C}^1(J_0)$ tq : $\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \text{ sur } J_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ [C p 66

2) **Th** : (Montel) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $\forall K$ compact de U, $\exists M_K\geq 0$ tq $\forall z\in K$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(z)|\leq M_K$.
Alors on peut extraire de (f_n) une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ uniformément convergente sur tout compact de U (vers une fonction holomorphe g) [y p 52 [R p 32

DVP

Appli : Application conforme de Riemann :
Th : Tout domaine simplement connexe du plan ($\neq\mathbb{C}$) est conformément équivalent au disque unité ouvert. [R

Références :

- [P] : Pommelet
- [B] : Brézis
- [G] : Gourdon Analyse
- [H-L] : Hirsch - Lacombe

primiel

- [D-S] Dunford-Schwartz
- [S] : Serre.

si on veut faire les dvp adhoc

- [C1] : Grouzeix - Nicquet.
- [Y] : Yger
- [R] : Rudin
- [OA] : Objectif Agrégation.
- [Z-Q] : Zuily - Queffélec
- [G-T] : Gourard - Tosel

Autres DVP :

- Représentation conforme de Riemann
- Cauchy - Péano
- Stone - Weierstrass.

⊕ Th de Schauder, Hadamard, sous groupe compact de GL_n ...